Révision 6 (fonctions)

1. - Posons $f\colon x \mapsto \cos^5(x)\sin(x)$, par puissance et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x)\colon x \mapsto -5\cos^4(x)\sin^2(x) + \cos^6(x) = \cos^4(x)\left(-5\sin^2(x)+\cos^2(x)\right) = \cos^4(x)\left(1-4\sin^2(x)\right)$$
   - Posons $h\colon x \mapsto 1+\cos^2(\mathrm{e}^x)$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions qui le sont. De plus, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, en outre $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée $g = \sqrt{} \circ h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'\colon x \mapsto \frac{-2\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)\cos(\mathrm{e}^x)}{2\sqrt{1+\cos^2(\mathrm{e}^x)}}$$

2. Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{2x} > 0$. Posons $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}$, alors $u^2-1 = \mathrm{e}^{2t}$, et donc $t = \dfrac{1}{2}\ln(u^2-1)$ et ainsi, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2-1}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}\,\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \frac{1}{u} \times \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int^{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)(u+1)}$$
Or, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+1}$$
En multipliant par $X-1$ et en remplaçant X par 1, on obtient $A = 1/2$. De même, en multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1, on obtient $B = -1/2$, ainsi :
$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}\,\mathrm{d}t &= \int^{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\left(\ln(|u-1|) - \ln(|u+1|)\right)\right]^{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \\ &= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1)\end{aligned}$$
Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1) - \dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

3. (a) Les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(|x|)} = \dfrac{C}{|x|} = \dfrac{C}{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   (b) En notant $g\colon x \mapsto 1/x$. On a ainsi que l'ensemble des fonctions solutions est $\mathrm{vect}(g)$. Dès lors (g) est une famille génératrice de l'espace des solutions, comme g n'est pas la fonction nulle, (g) est libre (famille d'un seul vecteur qui est non nul) donc (g) est une base de l'espace vectoriel des solutions.

   (c) Cherchons une solution particulière de la forme $y_p\colon x \mapsto \dfrac{C(x)}{x}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x > 0$:
$$y_p{}'(x) + \frac{1}{x}y_p(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{C(x)}{x} = \frac{C'(x)}{x}$$
On cherche donc C telle que pour tout $x > 0$, $C'(x) = x\cos(x)$. Or par intégration par parties :
$$\int^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x)$$
Ainsi, $x \mapsto x\sin(x)+\cos(x)$ est une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$, ainsi prenons $C\colon x \mapsto x\sin(x)+\cos(x)$. Ainsi, $y_p\colon x \mapsto \sin(x) + \dfrac{\cos(x)}{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Dès lors, les solutions de $y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = \cos(x)$ sont exactement les fonctions
$$x \mapsto \frac{C}{x} + \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$
De plus, $f(\pi) = \dfrac{C}{\pi} - \dfrac{1}{\pi}$, ainsi $f(\pi) = 1$ ssi $C - 1 = \pi$ ssi $C = 1+\pi$. Ainsi, l'unique fonction solution du problème de Cauchy est la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\pi}{x} + \sin(x) + \dfrac{\cos(x)}{x}$.

4. (a) On pose $u = \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
   - $u = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$

- $u^2 = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathcal{o}(x^5)$
- $u^3 = x^3 + x^5\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\right) + \mathcal{o}(x^5) = x^3 - \dfrac{x^5}{2} + \mathcal{o}(x^5)$
- $u^4 = x^4 + \mathcal{o}(x^5)$
- $u^5 = x^5 + \mathcal{o}(x^5)$
- Comme $u^5 \sim x^5$, $\mathcal{o}(u^5) = \mathcal{o}(x^5)$.

On effectue donc le $DL_5(0)$ d'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\exp(u) &\underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + \mathcal{o}(u^5)\\
\exp(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{o}(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{o}(x^5)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{o}(x^5)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + \mathcal{o}(x^5)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{120}\left(x^5 + \mathcal{o}(x^5)\right)\\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + x^4\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) + x^5\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right) + \mathcal{o}(x^5)\\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \mathcal{o}(x^5)
\end{aligned}$$

(b) Par troncature du développement limité à l'ordre 1, on constate alors que $x \mapsto 1 + x$ est tangente à la fonction $x \mapsto \exp(\sin(x))$.

(c) Comme

$$\exp(\sin(x)) - (1 + x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} > 0$$

la fonction $x \mapsto \exp(\sin(x))$ est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

(d) Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^5$, $f\colon x \mapsto \exp(\sin(x))$ est de classe $\mathscr{C}^5$. D'après la formule de Taylor, $\exp(\sin(x)) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + \mathcal{o}(x^5)$. Par unicité d'un développement limité, on obtient $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -3$ et $f^{(5)}(0) = -8$.

5. Soit $x > 3$, alors

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) - x\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x\left(-\frac{3}{x} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\left(-\frac{2}{x} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp(-1 + \mathcal{o}(1))
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exp en -1, on obtient que $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp(-1)$.

6. $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{o}(x^4)} = \dfrac{1}{1+u}$ avec :
   - $u = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{o}(x^4)$
   - $u^2 = \dfrac{x^4}{4} + \mathcal{o}(x^4)$
   - $u^2 \sim \dfrac{x^4}{4}$ donc $\mathcal{o}(u^2) = \mathcal{o}(x^4)$.

   Ainsi, appliquons le développement limité à l'ordre 2 de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \mathcal{o}(u^2) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \mathcal{o}(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathcal{o}(x^4)$$

7. Prenons $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = x\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}}$. On pose alors $u = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$, alors $u^2 = \dfrac{4}{x^2} + \mathcal{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, comme $u^2 \sim \dfrac{4}{x^2}$, $\mathcal{o}(u^2) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. De plus, $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \mathcal{o}(u^2)$, on obtient donc :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x^2}\right) + \mathcal{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que $x \mapsto x + 1$ est une asymptote à la fonction en $+\infty$, de plus, $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, on en déduit que la fonction est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \begin{cases} [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 - \dfrac{x}{2} - x^n \end{cases}$.

   (a) La fonction f_n est dérivable car polynômiale, de plus, $f_n' : x \mapsto -1/2 - nx^{n-1}$, on en déduit que f_n est strictement décroissante sur $[\,0\,;1\,]$, comme elle est continue, on en déduit qu'elle réalise une bijection de $[\,0\,;1\,]$ vers
   $$f_n([\,0\,;1\,]) = [\,f_n(1)\,;f_n(0)\,] = [\,-1/2\,;1\,]$$
   Ainsi, $0 \in f_n([\,0\,;1\,])$, dès lors, 0 admet un et un seul antécédent dans $[\,0\,;1\,]$.

   (b) Comme $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$, on en déduit que $x_n \neq 0$ et $x_n \neq 1$, ainsi $0 < x_n < 1$, en multipliant par ${x_n}^n > 0$, on en déduit que ${x_n}^{n+1} < {x_n}^n$, donc $-{x_n}^n < -{x_n}^{n+1}$, ainsi,
   $$0 = f_n(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - {x_n}^n < 1 - \frac{x_n}{2} - {x_n}^{n+1} = f_{n+1}(x_n)$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(x_n)$, comme f_{n+1} est décroissante, nécessairement [1] $x_{n+1} > x_n$. Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Elle est, de plus, majorée, par 1 donc ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   (d) Notons ℓ la limite de $(x_n)_n$, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, grâce à la conservation des inégalités larges par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

   (e) Supposons que $\ell < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \ell$ alors $0 \leqslant {x_n}^n \leqslant \ell^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'après le théorème d'encadrement, ${x_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi
   $$0 = 1 - \frac{x_n}{2} - {x_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{\ell}{2} - 0$$
   Par unicité de la limite $1 - \dfrac{\ell}{2} = 0$, ainsi $\ell = 2$. Ce qui est absurde. Ainsi, nécessairement, $\ell \geqslant 1$, comme $\ell \leqslant 1$, on en déduit que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = 1$.

9. On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

   (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$), et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -1/(2+x)^2$, ainsi $|f'(x)| \leqslant 1/4$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est 1/4-lipschitzienne.

   (b) Remarquons que $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle stable par f. Cherchons le ou les éventuels points fixes de f. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f(x) = x \iff x(2+x) = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = 0$$
   Les solutions de cette équation du second degré sont $\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} < 0$ et $\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2} > 0$, Ainsi, d'après le théorème sur les suites récurrentes définies par une fonction $f : I \to I$ k-lipschitizienne avec $k = 1/4 < 1$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$, on peut en conclure que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2} - 1$.

Remarque 1.

- $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{2+u_0}$
- $u_2 = f(u_1) = \dfrac{1}{2+u_1} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+u_0}}$
- $u_3 = f(u_2) = \dfrac{1}{2+u_2} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+u_0}}}$
- $u_4 = f(u_3) = \dfrac{1}{2+u_3} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+u_0}}}}$
- etc. Ainsi, quand on a fait tendre n vers $+\infty$, on obtient
$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}} \qquad \text{soit} \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$$

Ceci est l'écriture en fraction continue de $\sqrt{2}$.

1. Par l'absurde, si $x_n \geqslant x_{n+1}$, alors $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, ce qui n'est pas le cas.