Révision 8 : vrai ou faux

1. **Faux !** Si $\mathscr{F}$ est une base $\mathscr{F}$ n'est pas un espace vectoriel, donc $\dim(\mathscr{F})$ n'a pas de sens.
2. **Vrai !** C'est la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
3. **Faux !** Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}| = \dim(E)$. Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, alors E est un ensemble infini et $|E|$ n'a donc pas de sens (car E est un ensemble infini).
4. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{F} = ((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas une base de E bien que $|\mathscr{F}| = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.
5. **Vrai !** C'est une propriété du cours qui permet souvent de ne pas démontrer le caractère génératrice.
6. **Vrai !** C'est une propriété du cours.
7. **Vrai !** Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égale au cardinal d'une base et donc à la dimension de l'espace.
8. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{F} = ((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas libre bien que $|\mathscr{F}| \leqslant 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.
9. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{F} = ((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas libre bien qu'elle ne contienne pas le vecteur nul.
10. **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ contenait le vecteur nul, alors elle serait liée. Par contraposée, on a le résultat.
11. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0),(2,1,0))$ alors les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéaires, mais $\mathscr{F}$ n'est pas libre, en effet, $(2,1,0) = 2 \times (1,0,0) + 1 \times (0,1,0)$.
12. **Vrai !** Si l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est colinéaire à un autre vecteur, alors l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaires des autres et donc $\mathscr{F}$ est liée. Par contraposée, on a le résultat.
13. **Faux !** Les deux contiennent le vecteur nul donc ne peuvent être libre. De plus, E est un ensemble infini (sauf si $E = \{0_E\}$) et seuls les familles finies peuvent être libre suivant le programme de PCSI.
14. **Faux !** $\dim(\{0_E\}) = 0$.
15. **Faux !** Si $x = 0_E$, $\dim(\mathrm{vect}(x)) = \dim(\{0_E\}) = 0$.
16. **Faux !** Si $y = 2x$ et $x \neq 0_E$, alors $\dim(\mathrm{vect}(x,y)) = \dim(\mathrm{vect}(x)) = 1$
17. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$, et $\mathscr{F} = ((1,0),(0,1),(1,1))$, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, pourtant la famille $\mathscr{F}$ est liée.
18. **Faux !** Si $\mathscr{F} = (0, X, X^3, X^2)$ alors $\mathscr{F}$ est liée bien que les degrés des polynômes soient deux à deux distincts.
19. **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ était libre alors $|\mathscr{F}| \leqslant n$, par contraposée, on a le résultat.
20. **Faux !** Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,2,2))$ est liée tandis que $|\mathscr{F}| = 2 \leqslant 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
21. **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, alors, d'après le cours $|\mathscr{B}| = \dim(E) \leqslant |\mathscr{F}|$.
22. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(-7,-7,7))$, alors $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq E$, ainsi $|\mathscr{F}| = 4 \geqslant \dim(E) = 3$ mais $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice.
23. **Vrai !** Comme $(3,3,3) = (1,1,2) + (2,2,1)$, $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}((1,1,2),(2,2,1))$, mais $((1,1,2),(2,2,1))$ est une famille libre (deux vecteurs qui sont non colinéaires), ainsi $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}((1,1,2),(2,2,1)) = 2$.
24. **Vrai !**
    - Soit $x \in F + F$, alors il existe $f \in F$ et $\tilde{f}$ tel que $x = f + \tilde{f} \in F$ (car F SEV de E), ainsi $F + F \subset F$. D'autre part, soit $x \in F$, alors $x = 0_E + f \in F + F$, donc $F \subset F + F$, donc $F = F + F$.
    - Soit $x \in F + E$, alors il existe $f \in F$ et $e \in E$ tel que $x = f + e$, mais $f \in E$ et $e \in E$ et E est un espace vectoriel, donc $x \in E$, donc $F + E \subset E$. D'autre part, soit $x \in E$, alors $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$, donc $x \in F + E$. Donc $E \subset F + E$. Par conséquent, $E = F + E$.
25. **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = G = \mathrm{vect}((1,1))$, alors $F + G = F + F = F$ (par ce qui précède), ainsi $\dim(F+G) = \dim(F) = 1$ tandis que $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.
26. **Faux !** Toujours avec $E = \mathbb{R}^2$ et $F = G = \mathrm{vect}((1,1))$, alors $\dim(E) = 2 = \dim(F) + \dim(G)$ mais F et G ne sont pas supplémentaires, car $(1,1) \in F \cap G$.