Révision 10 (complexes, polynômes, sommes, produits)

1. Les racines n-ièmes de 1 sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\frac{2\pi}{n}} = \omega^k$ pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$ (en utilisant la formule de Moivre).
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :
$$|z| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z|^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z\overline{z} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{z} = \frac{1}{z}$$
Ainsi $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$
3. Soit $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$, comme ω est une racine n-ième de 1, $\overline{\omega^k} = \dfrac{1}{\omega^k} = \dfrac{\omega^n}{\omega^k} = \omega^{n-k}$.
   - Si $k = 0$, on a $\overline{\omega^k} = \omega^0$.
   - Si $k \in [\![\, 1\,;n-1\,]\!]$, $\overline{\omega^k} = \omega^r$ avec $r = n-k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$.

   Ainsi, pour tout $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$, il existe $r \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$, avec $r = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 0 \\ n-k & \text{si} \quad k \in [\![\, 1\,;n-1\,]\!] \end{cases}$
4. Proposons deux méthodes :
   - $\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme unitaire $X^n - 1$, donc d'après les relations coefficients-racines d'un polynôme scindé de degré n :
     — La somme des racines est l'opposé du coefficient en X^{n-1} donc ici $S_n = 0$
     — Le produit des racines est $(-1)^n$ fois le coefficient constant donc ici $P_n = (-1)^{n+1}$
   - — $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$ et $\omega^n = 1$)
     — $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi(n-1)}{n}\frac{n}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$ (somme des termes d'une suite arithmétique)
5. Posons $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} X^k$, de sorte que $Q' = P$. Or,
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad Q(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$$
(somme de n termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$ et de premier terme x). Donc en dérivant, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad P(x) = Q'(x) = \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) + (x-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$
6. La question précédente montre que $(X-1)^2P(X) - (nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1)$ a une infinité de racines (tous les réels différents de 1), c'est donc le polynôme nul, ainsi $(X-1)^2P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
7. Pour $k \in [\![\, 1\,;n-1\,]\!]$, ω^k est une racine n-ième de l'unité différente de 1. Ainsi,
$$P\left(\omega^k\right) = \frac{n(\omega^k)^{n+1} - (n+1)(\omega^k)^n + 1}{\left(\omega^k - 1\right)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{\left(\omega^k - 1\right)^2} = \frac{n\left(\omega^k - 1\right)}{\left(\omega^k - 1\right)^2} = \frac{n}{\omega^k - 1}$$
8. Les complexes $\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme unitaire $X^n - 1$ et elles sont toutes distinctes, ainsi :
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega^k\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \omega^k\right)$$
De plus, en utilisant la factorisation de $A^n - B^n$ par $A - B$:
$$X^n - 1 = X^n - 1^n = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k 1^{n-1-k} = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$
Ainsi, $(X-1)\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k - \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(X - \omega^k\right)\right] = 0$. Or, $\mathbb{C}[X]$ est intègre et $X - 1 \neq 0$, par conséquent
$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \omega^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$
En évaluant en 1, on obtient : $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - \omega^k\right) = n$.