Révision 11 : Dénombrement, Probabilités

1. (a) Chaque boulangerie a sept possibilités de jour de fermetures, et il y a quatre boulangeries donc le résultat est : $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

   (b) La première boulangerie a sept possibilités, mais la deuxième seulement six, la troisième cinq et la dernière quatre soit : $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 42 \times 20 = 480$.

   (c) Il y a sept possibilités pour qu'il y ait un jour sans aucune boulangerie ouverte : soit elles sont toutes fermées le lundi soit le mardi etc. Ainsi, il y a $7^4 - 7 = 2394$ possibilités pour qu'il y en ait au moins une ouverte chaque jour.

2. (a) $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$ que l'on muni de la probabilité uniforme : $\mathbb{P}\colon A \mapsto \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

   (b) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

   (c)
   - $(X = 1) = \{(1, 1)\}$, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{|\{(1, 1)\}|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{36}$
   - $(X = 2) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, donc $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$
   - $(X = 3) = \{(1, 3), (1, 3)\}$, donc $\mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{1}{18}$
   - $(X = 4) = \{(1, 4), (2, 2), (4, 1)\}$, donc $\mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{1}{12}$
   - $\mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{1}{18}$ (idem que $\mathbb{P}(X = 2)$)
   - $(X = 6) = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$ donc $\mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{1}{9}$
   - $\mathbb{P}(X = 8) = \dfrac{1}{18}$
   - $(X = 9) = \{(3, 3)\}$, $\mathbb{P}(X = 9) = \dfrac{1}{36}$
   - $(X = 10) = \{(2, 5), (5, 2)\}$, $\mathbb{P}(X = 10) = \dfrac{1}{18}$
   - $(X = 12) = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$, $\mathbb{P}(X = 12) = \dfrac{1}{9}$
   - $\mathbb{P}(X = 15) = \dfrac{1}{18}$
   - $\mathbb{P}(X = 16) = \dfrac{1}{36}$
   - $\mathbb{P}(X = 18) = \dfrac{1}{18}$
   - $\mathbb{P}(X = 20) = \dfrac{1}{18}$
   - $\mathbb{P}(X = 24) = \dfrac{1}{18}$
   - $\mathbb{P}(X = 25) = \dfrac{1}{36}$
   - $\mathbb{P}(X = 30) = \dfrac{1}{18}$
   - $\mathbb{P}(X = 36) = \dfrac{1}{36}$

   (d) Les nombres premiers dans l'univers image sont 2, 3, 5. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X\text{est premier}) = \mathbb{P}(X \in \{2, 3, 5\}) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 5) = 3 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

   (e)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \text{ est impair}) &= \mathbb{P}(X \in \{1, 3, 5, 9, 15, 25\}) \\
&= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 15) + \mathbb{P}(X = 25) \\
&= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   Une autre façon de le voir est de considérer que chaque dé à une chance sur deux pour donner un nombre impair et pour que X soit impair il faut et suffit que les deux dés soient impairs, ainsi, par indépendance, $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

   Ce n'est donc pas un pari raisonnable.

3. On remarque que $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap \overline{B_2}$, $\overline{B_1} \cap B_2$, $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ est un système complet d'évènements, ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)$$

Il faut donc calculer chacune de ces probabilités :

- $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ est un évènement impossible : on ne peut tirer trois boules bleues sans remise alors qu'il y a initialement seulement deux boules bleues, ainsi $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 0$
- D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap \overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1)\mathbb{P}(B_1)$$

  — $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, (deux boules bleues sur 10)

  — $\mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1) = \dfrac{8}{9}$ (après le premier tirage, où une boule bleue a été tirée, il reste 8 boules rouges sur 9 boules)

  — $\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap \overline{B_2}) = \dfrac{1}{8}$ (après les deux premiers tirages où une boule bleu et une boule rouge ont été tirées, il reste une boule bleue sur neuf boules)

  Ainsi, $\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{45}$.
- De même $\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{9} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{45}$
- $\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \dfrac{2}{8} \times \dfrac{7}{9} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{7}{45}$

Par somme, $\mathbb{P}(B_3) = \dfrac{1}{45} + \dfrac{1}{45} + \dfrac{7}{45} = \dfrac{9}{45} = \dfrac{1}{5}$

4. L'évènement recherchée est $A = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i}$ On va calculer la probabilité de l'évènement contraire qui est $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ (que des boules bleues ont été tirées). Pour cela, on utilise la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}\left(B_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} B_k\right)$$

Or, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. De plus, pour $i \in [\![2\,;n]\!]$, si l'évènement $\bigcap_{k=1}^{i-1} B_k$ est réalisé, alors $i-1$ boules bleues ont été tirées, il en reste donc $n-i+1$ sur $2n-i+1$ boules au total, ainsi,

$$\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}\left(B_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} B_k\right) = \frac{n-i+1}{2n-i+1}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$