Connaître son cours implique réussir aux concours

1. $$\exists x \in I \quad \exists x' \in I \qquad \big(f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'\big)$$
2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Et dans ce cas, on note $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
3. Soit $f\colon I \to J$ une fonction, on dit que f est une bijection si :
$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \qquad y = f(x)$$
4. Soit $y \in J$, alors il existe un unique $x \in I$ telle que $y = f(x)$, on pose alors $f^{-1}(y) = x$, ainsi, on a défini une fonction $f^{-1}\colon J \to I$.
5. Soit $f\colon I \to J$ une fonction, $f(I) = \{f(x) \text{ tel que} x \in I\}$.
6. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est croissante si
$$\forall (x, x') \in I^2 \qquad x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')$$
7. Ainsi, f n'est pas croissante si
$$\exists (x, x') \in I^2 \qquad x \leqslant x' \text{ et } f(x) > f(x')$$

Une équation radicale

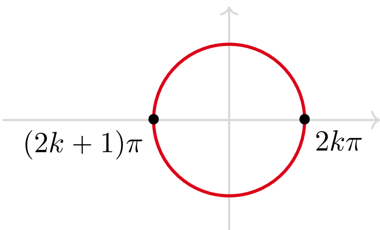
Le nombre $\sqrt{x-5} + \sqrt{x}$ est défini ssi $x - 5 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 5$ et $x \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 5$. Ainsi, le domaine de validité de cette inéquation est $[\,5\,; +\infty\,[$.
Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** supposons que x soit solution, alors $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$, en mettant au carré, on obtient
$$(x-5) + 2\sqrt{x}\sqrt{x-5} + x = 25$$
donc $2\sqrt{x(x-5)} = 30 - 2x$. Donc $\sqrt{x(x-5)} = 15 - x$ En mettant à nouveau au carrée, on obtient
$$x(x-5) = 225 - 30x + x^2$$
Ainsi, $-5x = 225 - 30x$ et donc $25x = 225$, finalement $x = 9$.
- **Synthèse :** si $x = 9$, alors $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$.

Ainsi, la synthèse montre que 9 est solution et l'analyse montre que c'est la seule. Ainsi, 9 est la seule solution de l'équation.

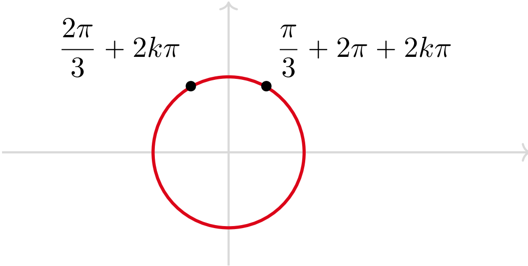
Des inéquations à faire éclater vos sinus

1. On cherche les angles dont le point sur le cercle trigonométrique a une ordonnée positive :



L'ensemble des solutions est
$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\,2k\pi\,; (2k+1)\pi\,]$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$



D'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}
\sin(2x+\frac{\pi}{4}) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leqslant 2x+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{3}+2\pi+2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi+2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{5\pi}{24}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{25\pi}{24}+k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x \in \left[\frac{5\pi}{24}+k\pi\,;\frac{25\pi}{24}+k\pi\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{24}+k\pi\,;\frac{25\pi}{24}+k\pi\right]$.

Comme au cinéma, serait-ce la suite de trop ?

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: «$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

- Pour $n=1$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1\times 2}{3} = 2 = u_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Un exercice monotone

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{x})} + \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{x})} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{x}+1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{2+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi $x \mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ aussi et cette fonction est strictement positive, ainsi par inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-(-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$$

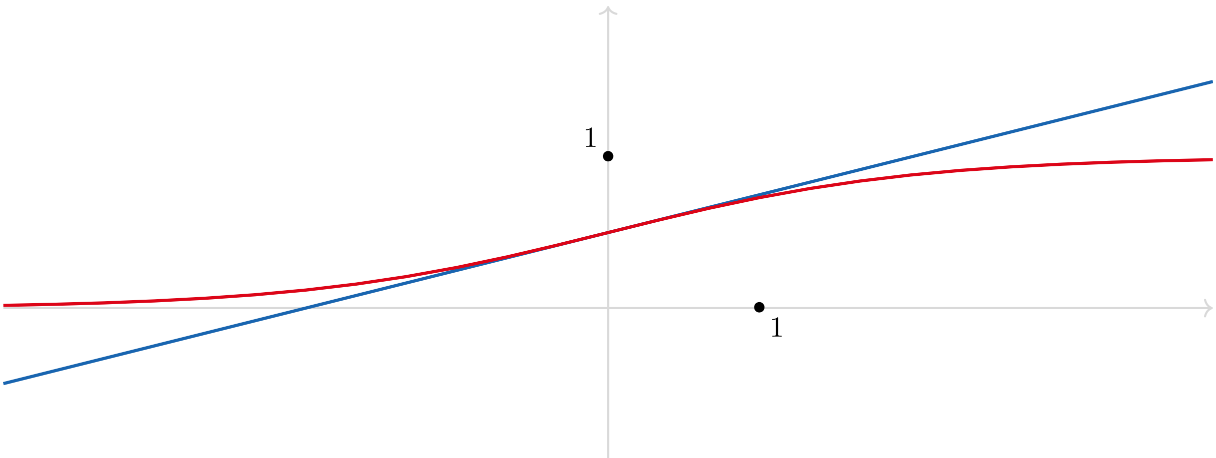
Ainsi, comme f' est strictement positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Comme $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $1+\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, par inverse, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De même, $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, $1+\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, par inverse, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

4. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$), ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f est une bijection de $\mathbb{R} = \left]-\infty\,;+\infty\right[$ vers

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x)\,; \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= \left]0\,;1\right[$$

5. L'équation de la tangente de f en 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

6. 

7. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = \dfrac{3}{4}$ ssi $1+\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{4}{3}$ ssi $3+3\mathrm{e}^{-x} = 4$ ssi $3\mathrm{e}^{-x} = 1$ ssi $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{3}$ ssi $\ln(\mathrm{e}^{-x}) = \ln(\dfrac{1}{3})$ ssi $-x = -\ln(3)$ ssi $x = \ln(3)$. Ainsi, la seule solution de $f(x) = \dfrac{4}{3}$ est $\ln(3)$.

8. Soit $y \in \left]0\,;1\right[$, alors il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ telle que $y = f(x)$, ainsi $y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ donc $y^{-1} = 1+\mathrm{e}^{-x}$ donc $y^{-1} - 1 = \mathrm{e}^{-x}$ donc $\ln(y^{-1}-1) = \ln(\mathrm{e}^{-x})$, dès lors, $x = -\ln\left(\dfrac{1-y}{y}\right)$. Par conséquent,

$$f^{-1} : \begin{cases} \left]0\,;1\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad y \quad \longmapsto \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right) \end{cases}$$

On rappelle que arcsin est dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$ et que $\arcsin' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Remarquons que $f : \mathbb{R} \to \left]-1\,;1\right[$ (car $f(\mathbb{R}) = \left]0\,;1\right[\subset \left]-1\,;1\right[$), et arcsin est dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$, par composée, $g = \arcsin \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = f'(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}}} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}}{\dfrac{\sqrt{(1+\mathrm{e}^{-x})^2-1}}{1+\mathrm{e}^{-x}}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{-x}}}$$

10. Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $u_0 \leqslant u_1$, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \leqslant u_{n+1}$», alors $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1}) \leqslant 1$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \max(1, u_0)$. Ceci prouve que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, donc converge d'après le théorème de la limite monotone.
- Si $u_0 \geqslant u_1$, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \geqslant u_{n+1}$», alors $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $u_n \geqslant u_{n+1}$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 0$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \min(0, u_0)$. Ceci prouve que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, donc converge d'après le théorème de la limite monotone.

Des fonctions fonction d'un scalaire

Soit $\lambda > 0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_λ par $f_\lambda\colon x \mapsto x + \lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

1. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto -x$ aussi, par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout comme $x \mapsto x+1$, par produit, $x \mapsto \lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi, par somme, f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f_\lambda{}'(x) = 1 + \lambda\mathrm{e}^{-x} - \lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x} = 1 - \lambda x\mathrm{e}^{-x}$$
Ainsi, $f_\lambda{}'\colon x \mapsto 1 - \lambda x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto x$ sont dérivables, par produit $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ l'est, par combinaison linéaire, $f_\lambda{}'$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_\lambda{}''(x) = -\lambda\mathrm{e}^{-x} + \lambda x\mathrm{e}^{-x}$$
Ainsi, $f_\lambda{}''\colon x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x}(x-1)$
3. On remarque que pour $x > 1$, $f_\lambda{}''(x) > 0$ que, $f_\lambda{}''(1) = 0$ et que pour $x < 0$, $f_\lambda{}''(x) < 0$. Ainsi, sur $[\,1\,;+\infty\,[$, la dérivée de $f_\lambda{}'$ est positive et ne s'annule qu'une seule fois, ainsi, $f_\lambda{}'$ est strictement croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$. De même, sur $]\,-\infty\,;1\,]$, la dérivée de $f_\lambda{}'$ est négative et ne s'annule qu'une seule fois, ainsi, $f_\lambda{}'$ est strictement décroissante sur $[\,-\infty\,;1\,[$.
4.
   - Sur $[\,1\,;+\infty\,[$, $f_\lambda{}'$ est continue (car dérivable) et strictement croissante, donc, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, $f_\lambda{}'$ réalise une bijection de $[\,1\,;+\infty\,[$ vers
   $$f_\lambda{}'\left([\,1\,;+\infty\,[\right) = \left[\,f_\lambda{}'(1)\,;\lim_{x\to+\infty} f_\lambda{}'(x)\,\right[= \left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;1\,\right[$$
   (en effet, par croissance comparée, $x\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ainsi, $f_\lambda{}'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$)
   - Sur $]\,-\infty\,;1\,]$, $f_\lambda{}'$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante, donc, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, $f_\lambda{}'$ réalise une bijection de $]\,-\infty\,;1\,]$ vers
   $$f_\lambda{}'\left(]\,-\infty\,;1\,]\right) = \left[\,f_\lambda{}'(1)\,;\lim_{x\to+\infty} f_\lambda{}'(x)\,\right[= \left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\,\right[$$
   (en effet, par produit de limites infinies, $x\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, ainsi, $f_\lambda{}'(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$)
5. Remarquons si $\lambda > e$, alors $1-\lambda\mathrm{e}^{-1} < 0$, si $\lambda = e$, alors $1-\lambda\mathrm{e}^{-1} = 0$ et si $\lambda < e$, alors $1-\lambda\mathrm{e}^{-1} > 0$. Ainsi :
   - Si $\lambda < e$, pour $x > 1$, par croissance stricte de $f_\lambda{}'$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ $f_\lambda{}'(x) > f_\lambda{}'(1) > 0$ et pour $x < 1$, par décroissance stricte de $f_\lambda{}'$ sur $]\,-\infty\,;1\,]$, $f_\lambda{}'(x) > f_\lambda{}'(1) > 0$. Ainsi, l'équation $f_\lambda{}'(x) = 0$ n'admet aucune solution.
   - Si $\lambda = e$, pour $x > 1$, par croissance stricte de $f_\lambda{}'$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ $f_\lambda{}'(x) > f_\lambda{}'(1) = 0$ et pour $x < 1$, par décroissance stricte de $f_\lambda{}'$ sur $]\,-\infty\,;1\,]$, $f_\lambda{}'(x) > f_\lambda{}'(1) = 0$ Ainsi, l'équation $f_\lambda{}'(x) = 0$ n'admet une seule solution $x = 1$.
   - Si $\lambda > e$, alors $f_\lambda{}'(1) < 0$. Ainsi, $0 \in \left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;1\,\right[$ et comme $f_\lambda{}'$ réalise une bijection de $[\,1\,;+\infty\,[$ vers $\left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;1\,\right[$, on peut en conclure que 0 admet un unique antécédent dans $[\,1\,;+\infty\,[$ noté x_1. De même $0 \in \left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\,\right[$ et comme $f_\lambda{}'$ réalise une bijection de $]\,-\infty\,;1\,]$ vers $\left[\,1-\lambda\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\,\right[$,

on peut en conclure que 0 admet un unique antécédent dans $]\,1\,;1\,]$ noté x_2. Remarquons que comme ${f_\lambda}'(1) < 0$, ${f_\lambda}'(x_1) = 0$, ${f_\lambda}'(x_2) = 0$, on a $x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq 1$, ainsi $x_2 < 1 < x_1$, en particulier $x_1 \neq x_2$ Par unicité de l'antécédent sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et sur $]\,-\infty\,;1\,]$, 0 ne peut pas avoir d'autres antécédents. Par conséquent, l'équation ${f_\lambda}'(x) = 0$ admet deux solutions.

6. - Si $\lambda < e$, alors la question pécédente, montre que ${f_\lambda}'$ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, par conséquent, f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\lambda = e$, alors la question précédente, montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, ${f_\lambda}'(x) \geqslant 0$ et que ${f_\lambda}'(x) = 0$ ssi $x = 0$. Par conséquent, ${f_\lambda}'$ est une fonction positive qui s'annule une seule fois, donc f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\lambda > e$, alors, pour $x < x_2$, par décroissance stricte de ${f_\lambda}'$ sur $]\,-\infty\,;1\,]$, alors ${f_\lambda}'(x) > f_\lambda(x_2) = 0$, ainsi, f_λ est strictement croissante sur $[\,-\infty\,;x_2\,[$ (dérivée positive qui s'annule une seule fois) si $x_2 < x \leqslant 1$, alors par décroissance stricte de ${f_\lambda}'$, ${f_\lambda}'(x) < {f_\lambda}'(x_2) = 0$, si $1 \leqslant x \leqslant x_1$, alors, par croissance stricte de ${f_\lambda}'$, ${f_\lambda}'(x) < {f_\lambda}'(x_1) = 0$. Ainsi, f_λ est strictement décroissante sur $[\,x_2\,;x_1\,]$ (dérivée négative qui s'annule deux fois). pour $x > x_1$, par croissance stricte de ${f_\lambda}'$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$, ${f_\lambda}'(x) > {f_\lambda}'(x_1) = 0$, ainsi, f_λ est strictement croissante sur $[\,x_1\,;+\infty\,[$ (dérive positive qui s'annule unee seule fois.

7. Si $\lambda < e$, la question précédente, montre que f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$). Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f_λ est une bijection de $\mathbb{R} =]\,-\infty\,;+\infty\,[$ vers
$$f_\lambda(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x)\,;\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)\right[=]\,-\infty\,;+\infty\,[= \mathbb{R}$$
En effet, par croissance comparée, $(x+1)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $(x+1)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

8. Comme $f_\lambda(0) = \lambda$, on en déduit que ${f_\lambda}^{-1}(\lambda) = 0$. Remarquons que f_λ est dérivable en $f^{-1}(\lambda) = 0$, de plus
$${f_\lambda}'(f^{-1}(\lambda)) = {f_\lambda}'(0) = 1 \neq 0$$
Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité de la bijection réciproque, ${f_\lambda}^{-1}$ est dérivable en λ et
$$({f_\lambda}^{-1})'(\lambda) = \frac{1}{{f_\lambda}'({f_\lambda}^{-1}(\lambda))} = 1$$

9. On utilise la commande donnée pour l'exponentielle, on calcule le résultat et on le revoit avec `return` :
```
import numpy as np
def f(a,x):
        return x+a*(x+1)*np.exp(-x)
```

10. - Si f_λ était impaire, on aurait $f_\lambda(0) = -f_\lambda(0)$ donc $\lambda = -\lambda$, ainsi $2\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$ ce qui contredit l'hypothèse, $\lambda > 0$.
    - Si f_λ était paire, on aurait $f_\lambda(1) = f_\lambda(-1)$, ainsi, $1 + 2\lambda\mathrm{e}^{-1} = -1$, ainsi, $\lambda = -\mathrm{e}^1 < 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\lambda > 0$.

    Ainsi, f_λ n'est ni paire ni impaire.

11. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si toutes les courbes des f_λ se coupent en x_0, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f_\lambda(x_0) = f_\mu(x_0)$, donc
$$x_0 + \lambda(x_0+1)\mathrm{e}^{-x_0} = x_0 + \mu(x_0+1)\mathrm{e}^{-x_0}$$
D'où $\lambda(x_0+1) = \mu(x_0+1)$, donc $(\lambda-\mu)(x_0+1) = 0$. En particulier, pour $\lambda = 5$ et $\mu = 48$, on obtient que $x_0 = -1$. Ainsi, si toutes les courbes des f_λ se coupent en x_0, alors $x_0 = -1$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(-1) = -1$, ainsi, la courbe de f_λ passe par le point de coordonnées $(-1,-1)$. Par conséquent, toutes les courbes des f_λ se coupent en un unique point, et c'est le point de coordonnées $(-1,-1)$

12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La tangente de f_λ en 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit
$$y = (1-\lambda\mathrm{e}^{-1})(x-1) + 1 + 2\lambda\mathrm{e}^{-1}$$
Si toutes les tangentes de f_λ en 1 se coupent en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$(1-\lambda\mathrm{e}^{-1})(x_0-1) + 1 + 2\lambda\mathrm{e}^{-1} = (1-\mu\mathrm{e}^{-1})(x_0-1) + 1 + 2\mu\mathrm{e}^{-1}$$

En retirant 1 et le terme en $x_0 - 1$ des deux côtés et en multipliant par e, il vient

$$-\lambda(x_0 - 1) + 2\lambda = -\mu(x_0 - 1) + 2\mu$$

D'où $(\lambda - \mu)(2 - (x_0 - 1)) = 0$
pour $\lambda = -\pi$ et $\mu = 3^{\sqrt{2}}$, on obtient que $3 - x_0 = 0$ donc $x_0 = 3$. Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(1 - \lambda e^{-1})(3 - 1) + 1 + 2\lambda e^{-1} = 3$. Ainsi, la tangente de f_λ au point 1, passe par le point de coordonnées $(3, 3)$. Ainsi, toutes les tangentes passe par le point de coordonnées $(3, 3)$ et c'est le seul point.

Soyez aussi fonctionnel que cette équation !

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \qquad f(x - f(x')) = 2 - x - x'$$

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \qquad f(x - f(x')) = 2 - x - x'$$

Fixons $X \in \mathbb{R}$ et cherchons la valeur de $f(X)$: prenons $x = X + f(0)$ et $x' = 0$, alors :

$$f(X) = f(x - f(0)) = f(x - f(x')) = 2 - x - x' = 2 - (X + f(0)) - 0 = -X + 2 - f(0)$$

Il reste donc à déterminer la valeur de $f(0)$, mais en prenant $X = 0$, on obtient $f(0) = 2 - f(0)$ soit $f(0) = 1$, et donc $f(X) = 1 - X$ ainsi, si f est solution du problème, alors $f : x \mapsto 1 - x$.

- **Synthèse :** posons $f : x \mapsto x + 1$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x - f(x')) = f(x - (1 - x')) = f(x + x' - 1) = 1 - (x + x' - 1) = 2 - x - x'$$

Ainsi, f est bien solution du problème.

Ainsi, la synthèse, montre que $x \mapsto 1 - x$ est solution du problème, et l'analyse montre que c'est la seule. Par conséquent, le problème admet une et une solution $x \mapsto 1 - x$.

Ne vous décomposez pas mais décomposez un !

Posons l'hypothèse de récurrence, pour un entier $n \geqslant 3$, $\mathscr{P}(n)$: «il existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ tel que $1 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \dots + \dfrac{1}{a_n}$».

- Pour $n = 3$. On pose $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 6$. Alors, comme $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = 1$, $\mathscr{P}(3)$ est vraie.
- Soit un entier $n \geqslant 3$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, il existe $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ tel que $1 = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} + \dots + \dfrac{1}{b_n}$».
Remarquons que si $b_1 = 1$, alors :

$$1 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots \frac{1}{b_n} = 1 + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n} > 1$$

Ce qui est impossible, dès lors, $b_1 \geqslant 2$. Alors :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots \frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b_1} + \frac{1}{2b_2} + \dots + \frac{1}{2b_n}$$

On pose alors, $a_1 = 2$, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $a_{i+1} = 2b_i$. On a alors

$$a_1 = 2 < a_2 = 2b_1 < a_3 = 2b_2 < \dots < a_{n+1} = 2b_n$$

Ainsi, $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ convient. Dès lors, $\mathscr{P}(n + 1)$ est vérifiée.

- Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n} = 1$ vérifiant $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, en particulier les a_i sont deux à deux distincts.