Chapitre 6

Somme, produit, petits systèmes linéaires, arithmétique

Dans ce chapitre, nous allons voir les sommes et les produits, les petits systèmes linéaires et des bases d'arithmétique.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Sommes et Produits

1.1 Définitions et propriétés

Définition d'une famille

Soit I un ensemble fini. Si pour tout $i \in I$, on dispose d'un élément a_i, alors, la collection de tous ces a_i est appelée **famille** finie indexée par I et est notée $(a_i)_{i\in I}$.

Définition de la somme et du produit d'une famille

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On note, $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$ et $\prod\limits_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Par **convention**, si $I = \varnothing$, $\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod\limits_{i\in I} a_i = 1$.

Exemple 1. Si $I = \{3; 5; 7; 11\}$, $a_3 = 5$, $a_5 = 6$, $a_7 = 7$ et $a_{11} = 7$, alors $\sum\limits_{i\in I} a_i =$ et $\prod\limits_{i\in I} a_i =$.

Remarques 1.

- Si $I = [\![m\,; n]\!] = \{m; m+1; \dots; n-1; n\}$ avec $m \leqslant n$, on note aussi

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n \qquad (n-m+1 \text{ termes})$$

- L'indice i est un indice «muet» : on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non encore utilisé :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{k=m}^{n} a_k$$

- Le nombre $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$ dépend de m et de n mais pas de i. Écrire cette $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$ en fonction de i est une erreur.

Proposition n° 1 : règles de calculs pour la somme (linéarité de la somme) et le produit

Soient I un ensemble fini à p éléments $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres de $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\sum\limits_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$
2. $\sum\limits_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} a_i$
3. $\prod\limits_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod\limits_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod\limits_{i\in I} b_i\right)$
4. $\prod\limits_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^p \prod\limits_{i\in I} a_i$

Exemple 2.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} 1$
2. Calculer $\prod\limits_{k=0}^{n} 2$
3. Prouver $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.2 Méthodes de calculs

Changement d'indice

Pour effectuer un changement d'indice, on définit le nouvel indice (entier) en fonction de l'ancien indice. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice en veillant à changer les bornes de la somme et le terme sous la somme en fonction du nouvel indice.
Formellement, si $\varphi\colon J \to I$ est une bijection entre deux ensembles finis, $\sum\limits_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \sum\limits_{i\in I} a_i$.

Exemple 3. Faites un changement d'indice dans $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}$ et dans $\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$.

À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

Séparation/regroupement de termes
On peut décomposer la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer ou au contraire regrouper plusieurs sommes en une seule. Formellement, si $I = J \cup K$ avec J et K disjoints, alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{k\in K} a_k$.

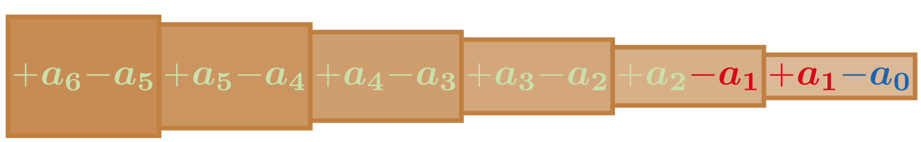
Exemples 4.
1. Couper $\sum_{k=1}^{2n} u_k$ en deux sommes ayant le même nombres de termes.
2. Couper $\sum_{k=1}^{2n+1} u_k$ en isolant le terme au milieu.
3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$, où $\min(k, n)$ est le minimum des entiers k et n.
4. Couper $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en deux sommes, l'une avec des indices pairs et l'autre avec des indices impairs.

Exemple 5. $(a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_2$ et si a_2, a_3 et a_4 sont non nuls, $\frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_5}{a_2}$

Proposition n° 2 : somme et produit télescopiques
Soit $(a_k)_{m\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de nombres, $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$, si tous a_i sont non nuls, $\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Par linéarité de la somme, puis par changement d'indice puis par séparation de somme :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n} a_j + a_{n+1} - \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k + a_m\right) = a_{n+1} - a_m \qquad \blacksquare$$



Exemple 6.
1. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_n$.
3. Calculer le produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Remarque 2. Soit $(z_k)_{k\in I}$ une famille finie de complexes, alors $\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in I} z_k\right) = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(z_k)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{k\in I} z_k\right) = \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(z_k)$

Proposition n° 3 : somme de termes d'une suite arithmétique
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors pour $n \geqslant m$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2} \times (n - m + 1) = \frac{\text{premier terme de la somme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Démonstration de la proposition n° 3 : Notons r la raison de cette suite. Calculons le double cette somme en effectuant un changement d'indice $j = n+m-k$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}2\sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{j=m}^{n} u_{n+m-j} = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_{n+m-k} = \sum_{k=m}^{n} (u_k + u_{n+m-k}) \\ &= \sum_{k=m}^{n} ([u_m + (k-m)r] + [u_n + (m-k)r]) = \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_n) = (u_m+u_n)(n-m+1)\end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient le résultat. ■

Exemple 7. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k$.

Proposition n° 4 : somme de termes d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour $n \geqslant m$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Dans le cas où $q = 1$ (suite constante), $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m$.

Démonstration de la proposition n° 4 : Si $q \neq 1$, alors :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{q=m}^{n} (1-q)u_k = \sum_{q=m}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1} = u_m - u_m q^{n+1-m} = u_m(1-q^{n+1-m})$$

En divisant par $1-q$, on obtient le résultat. Si $q = 1$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m = u_m(n-m+1)$$ ■

Exemple 8.

1. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Soit $x \in \mathbb{C}$, calculer $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.

Calcul de somme de cosinus/sinus

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

Exemple 9. $(a-b)(a+b) =$ $\qquad$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ $\qquad$ $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) =$

Proposition n° 5 : identité remarquable

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

Démonstration de la proposition n° 5 : En partant du membre de gauche et en utilisant la linéarité, on reconnaît une somme télescopique :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1}b^{n-1-k}}_{=u_{k+1}} - \underbrace{a^k b^{n-k}}_{=u_k} = \underbrace{a^n}_{u_n} - \underbrace{b^n}_{u_0}$$

■

Exemple 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la dérivabilité de $p_n \colon x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$.

1.3 Sommes doubles

Définition

Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille finie de nombres complexes. On note $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ la **somme double** des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

Si $I = [\![m\,;n]\!]$ et $J = [\![p\,;q]\!]$, on note $\sum\limits_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{i,j}$ au lieu de $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$. Si $I = J = [\![m\,;n]\!]$, on note $\sum\limits_{m\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

	p	$p+1$	$\dots$	j	$\dots$	q	Totaux par ligne
m	$a_{m,p}$	$a_{m,p+1}$	$\cdots$	$a_{m,j}$	$\cdots$	$a_{m,q}$	$\sum\limits_{j=p}^{q} a_{m,j}$
$m+1$	$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,j}$	$\cdots$	$a_{m+1,q}$	$\sum\limits_{j=p}^{q} a_{m+1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
i	$a_{i,p}$	$a_{i,p+1}$	$\cdots$	$a_{i,j}$	$\cdots$	$a_{i,q}$	$\sum\limits_{j=p}^{q} a_{i,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
n	$a_{n,p}$	$a_{n,p+1}$	$\cdots$	$a_{n,j}$	$\cdots$	$a_{n,q}$	$\sum\limits_{j=p}^{q} a_{n,j}$
Totaux par colonne	$\sum\limits_{i=m}^{n} a_{i,p}$	$\sum\limits_{i=m}^{n} a_{i,p+1}$		$\sum\limits_{i=m}^{n} a_{i,j}$		$\sum\limits_{i=m}^{n} a_{i,q}$	

(a) Somme indexée par un rectangle

	m	$m+1$	$\cdots$	j	$\cdots$	n	Totaux par ligne
m	$a_{m,m}$	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,j}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	$\sum\limits_{j=m}^{n} a_{m,j}$
$m+1$		$a_{m+1,m+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,j}$	$\cdots$	$a_{m+1,n}$	$\sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{m+1,j}$
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$	
i				$\ddots$		$a_{i,n}$	$\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	
n						$a_{n,n}$	$\sum\limits_{j=n}^{n} a_{n,j}$
Totaux par colonne	$\sum\limits_{i=m}^{m} a_{i,m}$	$\sum\limits_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1}$		$\sum\limits_{i=m}^{j} a_{i,j}$		$\sum\limits_{i=m}^{n} a_{i,n}$	

(b) Somme indexée par un triangle

Proposition n° 6 : somme double indexée par un rectangle

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{i,j}$ une famille de complexes indexée par le rectangle $[\![m\,; n]\!] \times [\![p\,; q]\!]$. Alors :

$$\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} \right) = \sum_{j=p}^{q} \left(\sum_{i=m}^{n} a_{i,j} \right)$$

Proposition n° 7 : somme double indexée par un triangle

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{i,j}$ une famille de complexes indexée par le triangle $\{(i,j) \mid m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Alors :

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=m}^{n} \left(\sum_{i=m}^{j} a_{i,j} \right)$$

Exemple 11. Calculer $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Remarque 3. Les résultats précédents s'étendent si on remplace somme double par produit double.

Théorème n° 1 : produit de deux sommes

Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ deux familles de nombres complexes : $\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$

Remarque 4. Calculer $(a+b+c)^2$, puis développer $(a_1 + \ldots + a_n)^2$

1.4 Factorielle, coefficient binomial, binôme de Newton

Définition de la factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n l'entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Exemple 12. Donner les valeurs de $1! =$ $2! =$ $3! =$ $4! =$ $5! =$ $0! =$

Remarque 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Définition du coefficient binomial

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On pose $\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0\,; n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ le **coefficient binomial** et se lit «p parmi n».

Exemple 13. Pour n dans $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, donner les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.

Proposition n° 8 : propriétés des coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $p \in [\![0\,; n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux)
2. Pour tout $p \in [\![1\,; n]\!]$, $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$ (formule du maire)
3. Pour tout $p \in [\![1\,; n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule du triangle de Pascal)

Remarque 6. La formule du triangle de Pascal permet le calcul des coefficients binomiaux et montre que $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Théorème n° 2 : formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et n un entier naturel, alors $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Démonstration du théorème n° 2 : Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$».

- Pour $n = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, tandis que $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b) a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \binom{n+1}{0} a^{n+1-(n+1) b^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Exemple 14. Développer l'expression $(x-1)^5$.

Sommes de coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. En déduire $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

Exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$

Linéariser $\cos(\theta)^n$