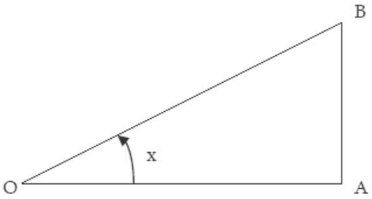
OUTILS MATHEMATIQUES POUR LA MECANIQUE

1. Trigonométrie

1.1. Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Soit un triangle rectangle d'hypoténuse OB et l'angle orienté $x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



cos x = OA / OB

sin x = AB / OB

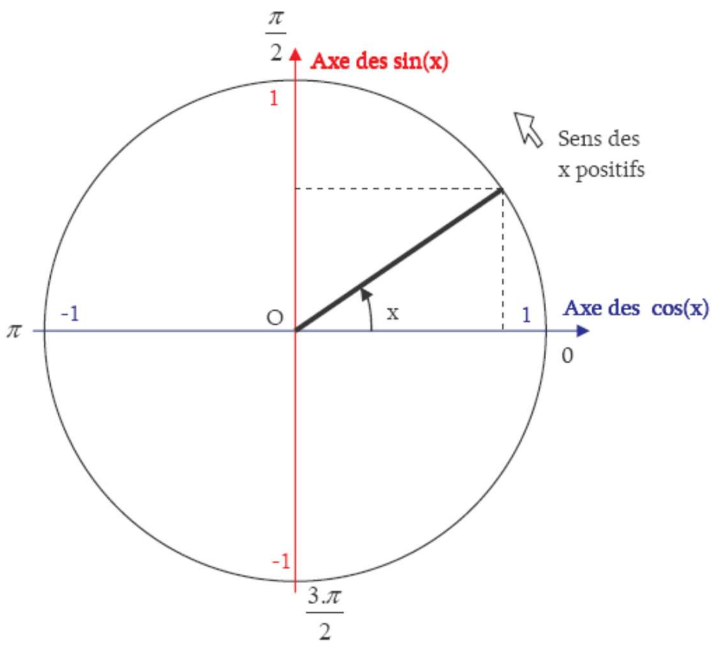
tan x = AB / OA = sin x / cos x

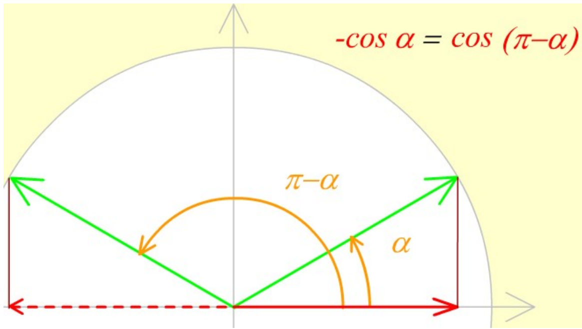
sin 2x = 2 sin x . cos x
cos 2x = 1 – 2 sin² x

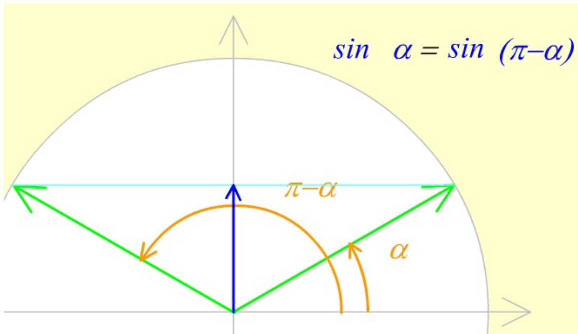
sin² x = 0.5 (1 – cos 2x)

cos² x = 0.5 (1 + cos 2x)

1.2. Application au cercle trigonométrique



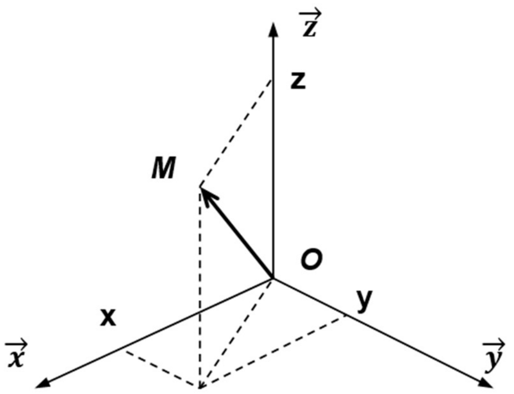


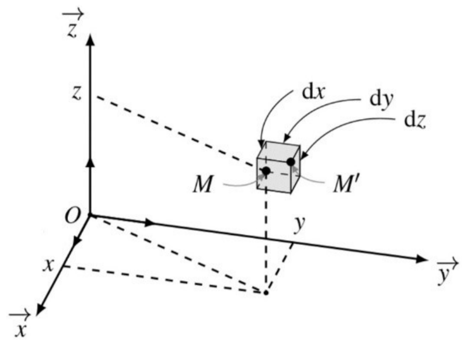


Exercice 1: Simplifier les expressions suivantes en utilisant le cercle trigonométrique.

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ $\quad -\sin(-\alpha)$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ $\quad -\cos(\pi + \alpha)$ $\quad \sin(\pi - \alpha)$ $\quad -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

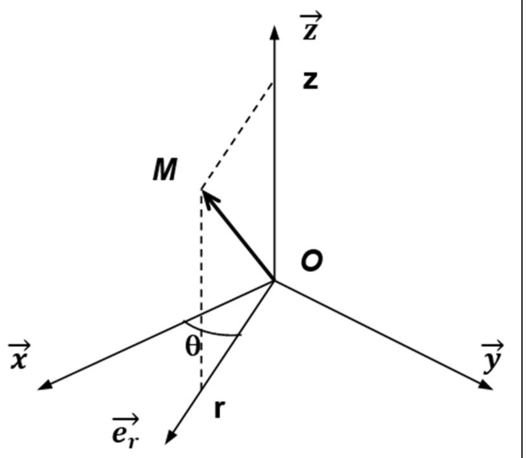
2. Systèmes de coordonnées

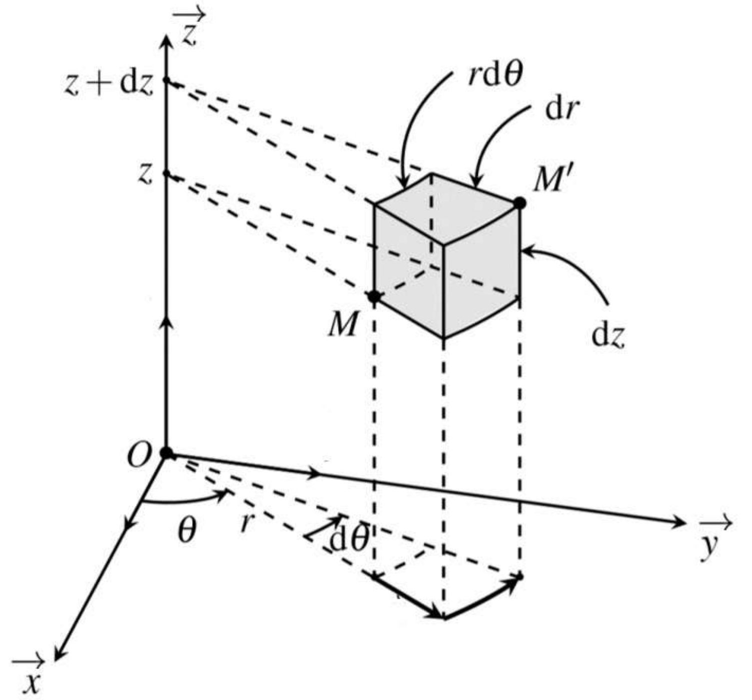
<table>
<tr><th>Système de coordonnées cartésien</th><th>$M\ (x, y, z)$</th><th>$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$</th></tr>
<tr><td>

Remarque : en Sciences Physiques, cette base sera notée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$</td><td colspan="2">

Portion de parallélépipède : dV = dx . dy . dz
Portion de rectangle : dS = dx . dy</td></tr>
</table>

Système de coordonnées cylindrique	$M\ (r, \theta, z)$	$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{z}$



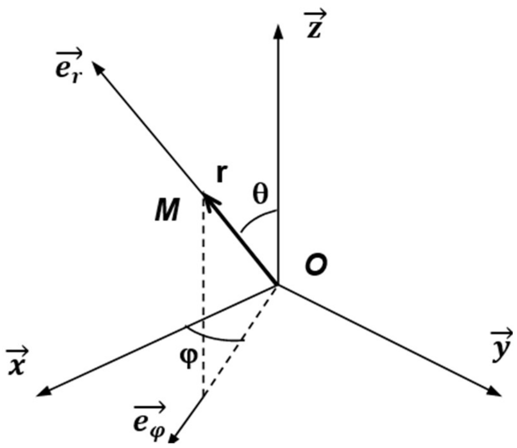


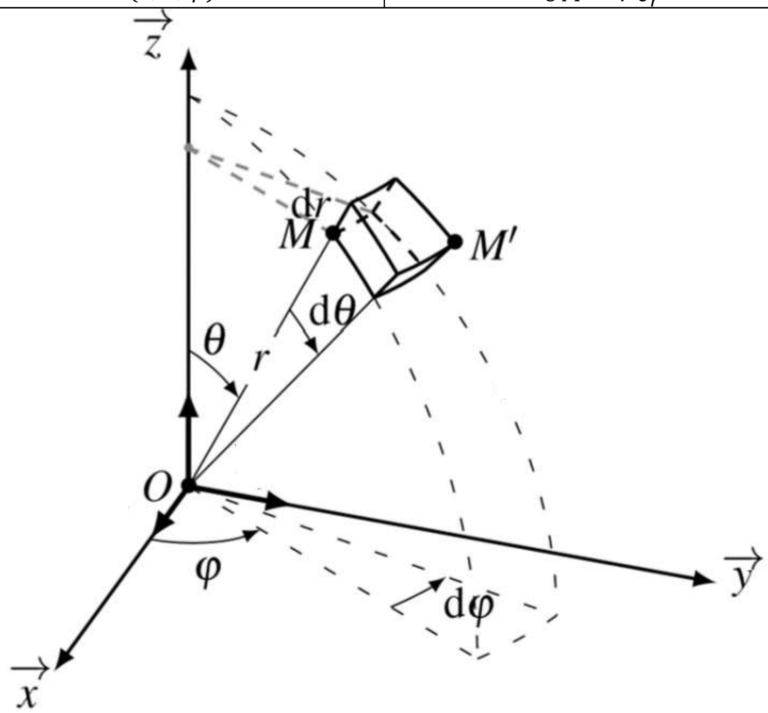
Portion de cylindre plein : dV = r dθ . dr . dz

Portion de couronne : dS = r dθ . dr

Portion de surface cylindrique : dS = r dθ . dz

Système de coordonnées sphérique	$M\ (r, \theta, \varphi)$	$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$





Portion de sphère pleine : dV = r sin θ dφ. r dθ. dr

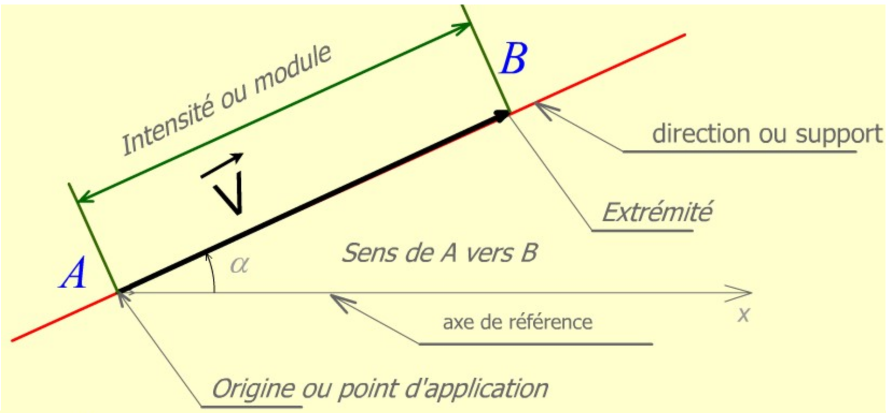
Portion de sphère creuse : dS = r sin θ dφ. r dθ

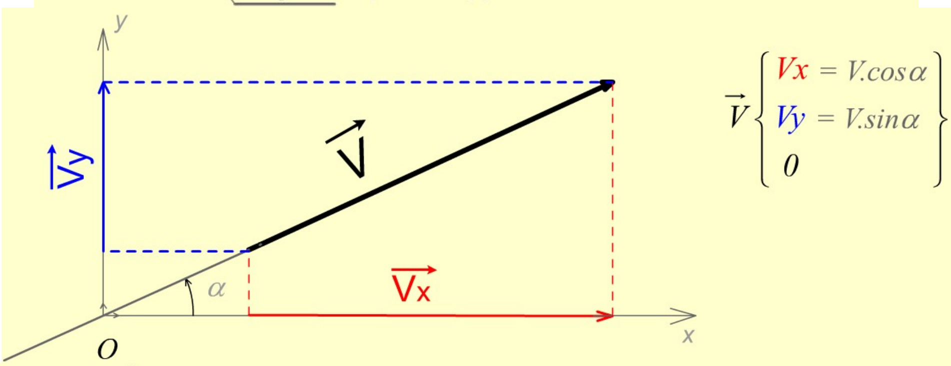
3. Vecteurs

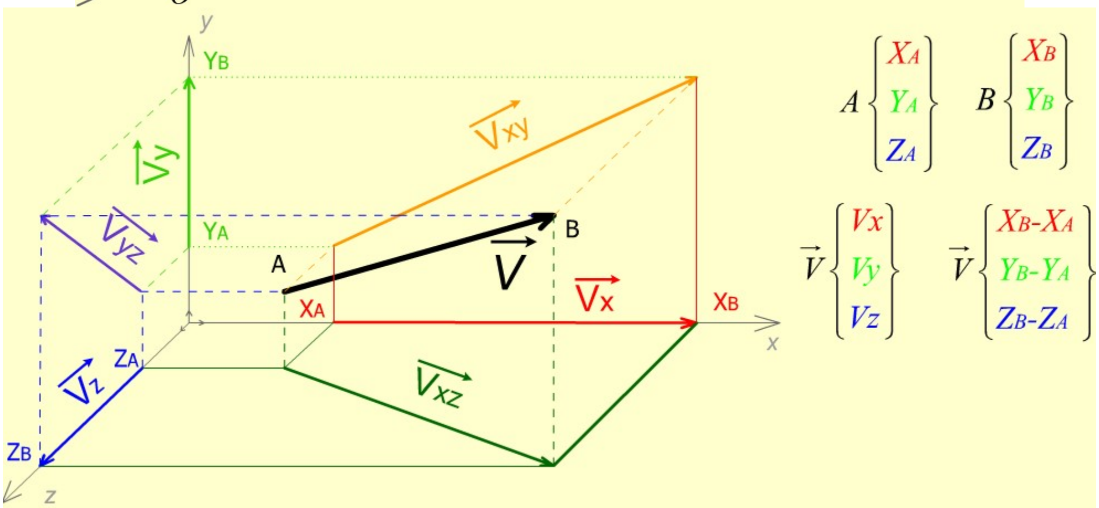
3.1. Présentation du vecteur

Un **vecteur** est un objet qui résume trois informations :

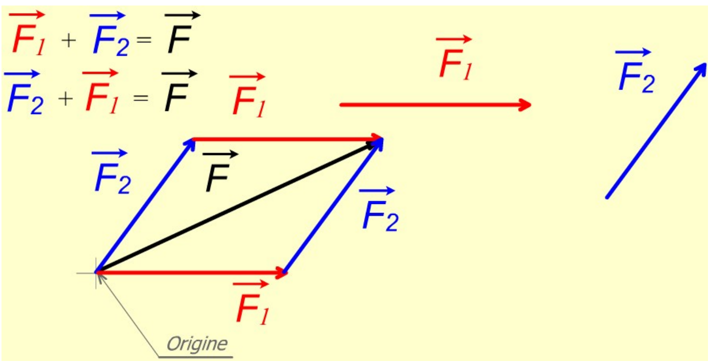
- une direction (le support de la flèche)
- un sens (l'orientation de la flèche)
- une intensité (la longueur de la flèche)







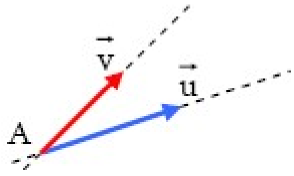
3.2. Addition de vecteurs



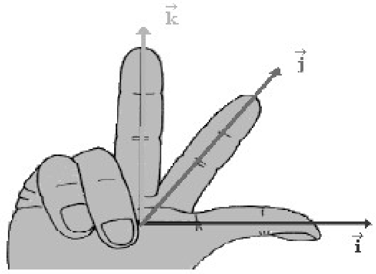
3.3. Produit scalaire

Si dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z'), alors leur **produit scalaire** est un scalaire donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z' \qquad\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$$



3.4. Orientation de l'espace : règle de main droite



Une base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'obtient en plaçant dans l'ordre impératif suivant :

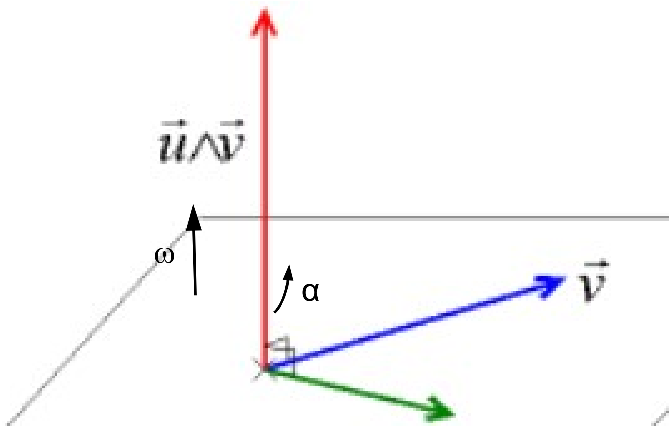
- le pouce suivant le premier vecteur $\vec{i}$
- l'index suivant le deuxième vecteur $\vec{j}$
- le majeur, plié à angle droit, donne le vecteur $\vec{k}$

3.5. Produit vectoriel

On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, sin(\vec{u}, \vec{v}).\,\vec{w}$

Ce vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini par :

- sa direction : perpendiculaire au plan constitué par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- son sens : la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ doit être directe
- son intensité est donnée par l'équation suivante : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, |sin(\vec{u}, \vec{v})|$



Si dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z'), alors leur **produit vectoriel** est un vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donné par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y\,z' - y'z \\ z\,x' - z'x \\ x\,y' - x'y \end{vmatrix}$$

Exercice 2 :

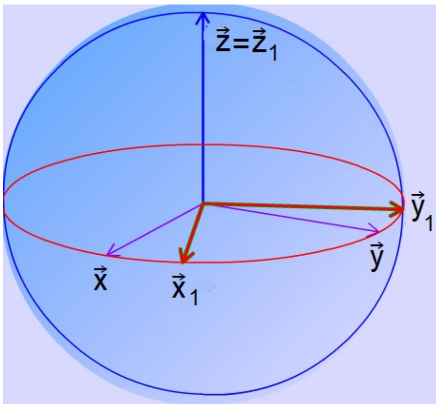
Soit les points A(5, 2, 0), B(-2, 1, 3) et C(4, 0, -1) définis dans un repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Déterminer :

$\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}.\vec{x}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}.\vec{y}$ $\quad$ $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\vec{z}$

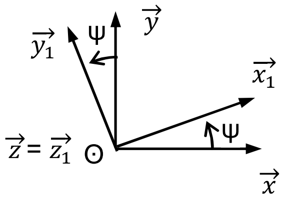
Exercice 3 : Les angles d'Euler

Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ deux bases orthonormées de l'espace vectoriel E_3.
Les trois angles d'Euler permettent de paramétrer une base par rapport à une autre. Ils sont définis par :

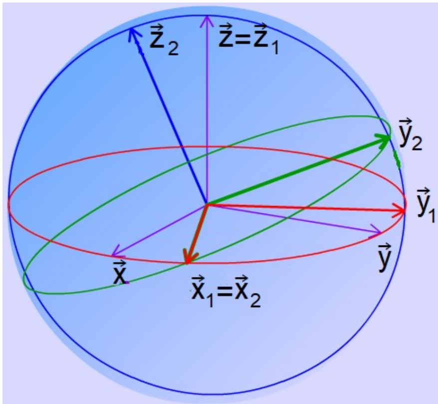
précession ψ autour de $\vec{z}$:
$\vec{x_1}$ appartient au plan $(\vec{x_3}, \vec{y_3})$



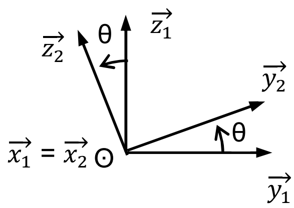
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\psi} (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$



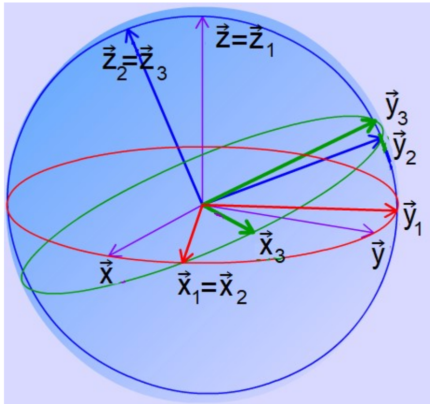
nutation θ autour de $\vec{x_1}$:
$\vec{y_2}$ appartient au plan $(\vec{x_3}, \vec{y_3})$



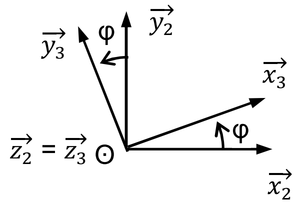
$(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}) \xrightarrow{\theta} (\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$



rotation propre φ autour de $\vec{z_2}$



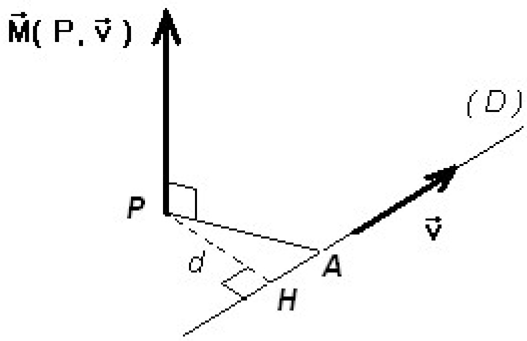
$(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}) \xrightarrow{\varphi} (\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$



Q1. Exprimer $\vec{x}$, puis $\vec{y}$, en fonction de $\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}$.
Q2. Exprimer $\vec{x_1}$, puis $\vec{y_1}$, $\vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$, en fonction de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
Q3. Calculer $\vec{x_1} \wedge \vec{y_1}$, $\vec{y_1} \wedge \vec{x_1}$, $\vec{x} \wedge \vec{y}$, $\vec{z} \wedge \vec{y}$, $\vec{x_1} \wedge \vec{z_2}$, $\vec{y_2} \wedge \vec{z_2}$, $\vec{x} \wedge \vec{x_1}$, $\vec{x} \wedge \vec{y_1}$, $\vec{y_2} \wedge \vec{y_1}$, $\vec{x_3} \wedge \vec{x_2}$, $\vec{y_2} \wedge \vec{z_1}$, $\vec{y} \wedge \vec{y_1}$, $\vec{y} \wedge \vec{y}$

4. Moments d'un vecteur

4.1. Moment d'un vecteur par rapport à un point



Soit un vecteur $\vec{v}$ de l'espace et une droite (D) dirigée par $\vec{v}$.
On appelle **vecteur glissant** le couple (D, $\vec{v}$).
Soit A un point de (D). Le moment du vecteur glissant (D, $\vec{v}$) par rapport à un point P de l'espace est défini par : $\vec{M}(P, \vec{v}) = \vec{PA} \wedge \vec{v}$

- ce moment est indépendant du point A de (D).
- si H est la projection orthogonale de P sur (D), on a facilement la norme du moment $\vec{M}(P, \vec{v})$

$$\vec{M}(P, \vec{v}) = \vec{PA} \wedge \vec{v} = (\vec{PH} + \vec{HA}) \wedge \vec{v} = \vec{PH} \wedge \vec{v}$$

$$\left\|\vec{M}(P, \vec{v})\right\| = \left\|\vec{PH} \wedge \vec{v}\right\| = \mathrm{d}\,\|\vec{v}\|$$ dans laquelle d est la distance de P à la droite (D).

4.2. Changement de point (Formule de Varignon)

Soit un vecteur glissant (D, $\vec{v}$). un point A de (D) et deux points M et P de l'espace.
Calculons la relation entre les moments en M et en P. On a : $\vec{M}(P, \vec{v}) = \vec{PA} \wedge \vec{v}$ et $\vec{M}(M, \vec{v}) = \vec{MA} \wedge \vec{v}$
Or, d'après la relation de Chasles, on peut écrire : $\vec{PA} \wedge \vec{v} = \vec{PM} \wedge \vec{v} + \vec{MA} \wedge \vec{v}$

d'où l'on tire : $\vec{M}(P, \vec{v}) = \vec{M}(M, \vec{v}) + \vec{PM} \wedge \vec{v}$ **« Formule de Varignon »**

4.3. Relation entre moment et champ équiprojectif

Tout champ équiprojectif est un champ de moment et réciproquement.

Soit un vecteur glissant (D, $\vec{v}$) et deux points A et B de l'espace. On a : $\vec{M}(A,\vec{v}) = \vec{M}(B,\vec{v}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}$

Si l'on effectue le produit scalaire par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a : $\vec{M}(A,\vec{v}).\overrightarrow{AB} = \vec{M}(B,\vec{v}).\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{AB}$

d'où l'on peut tirer : $\boxed{\vec{M}(A,\vec{v}).\overrightarrow{AB} = \vec{M}(B,\vec{v}).\overrightarrow{AB}}$

5. Torseur

5.1. Définition d'un torseur par ses éléments de réduction en un point

On appelle **torseur**, l'ensemble des deux champs de vecteurs, appelés éléments de réduction :

- un champ uniforme $\vec{R}$ appelé **résultante** du torseur,
- un champ équiprojectif $\vec{M}$ appelé **moment résultant** du torseur en un point.

On note le torseur $\{T\}$ réduit au point A ainsi : $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{Bmatrix}$ (écriture à privilégier)

ou $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} R_X & M_{AX} \\ R_Y & M_{AY} \\ R_Z & M_{AZ} \end{Bmatrix}_R$ avec $\begin{vmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} M_{AX} \\ M_{AY} \\ M_{AZ} \end{vmatrix}$ les composantes respectives de $\vec{R}$ et $\vec{M}(A)$ dans un même repère R.

5.2. Invariants d'un torseur

On appelle invariants d'un torseur, les quantités restant constantes quel que soit le point de réduction du torseur.

- la résultante $\vec{R}$ est invariante pour un torseur donné.
- **l'invariant scalaire** est $\boxed{I = \vec{R}\,.\,\vec{M}(A)}$

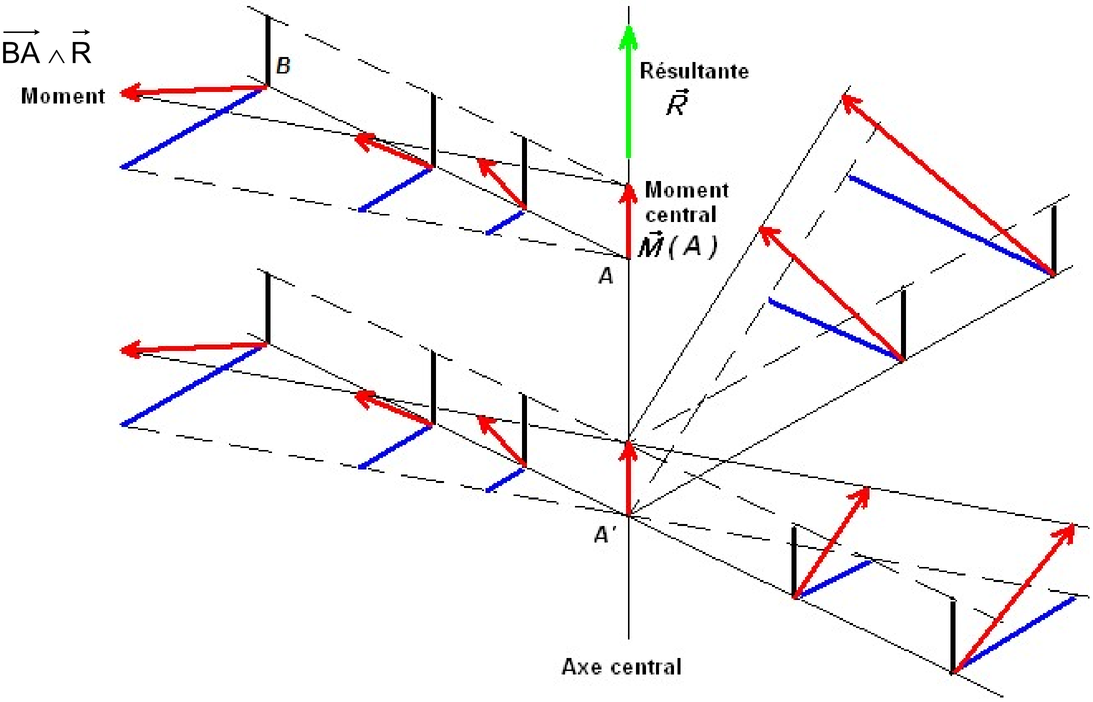
En effet, si B est un point de l'espace : $\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$

On en déduit, en multipliant par $\vec{R}$, que : $\vec{R}\,.\,\vec{M}(B) = \vec{R}\,.\,\vec{M}(A)$

- **l'invariant vectoriel** est : $\boxed{\vec{I} = I\,\frac{\vec{R}}{\vec{R}^2}}$

5.3. Axe central d'un torseur

$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$



Remarque : cette représentation où apparaît une torsion permet d'expliquer l'étymologie de « torseur ».

On appelle **axe central** d'un torseur, l'ensemble des points A pour lequel résultante et moment en A sont colinéaires.

$\boxed{\vec{M}(A) = \lambda\,\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ appartient à l'axe central de } \{T\}}$ avec λ : le pas du torseur.

- Si $\vec{R} = \vec{0}$, tout point de l'espace convient.
- Si $\vec{R} \neq \vec{0}$, supposons connus les éléments de réduction du torseur en B. On a : $\{T\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{Bmatrix}$

et donc $\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R}$ c'est-à-dire $\vec{M}(A) - \vec{M}(B) = \vec{R} \wedge \vec{BA}$

Pour déterminer $\vec{BA}$, effectuons la division vectorielle qui est possible car on a : $\left(\vec{M}(A) - \vec{M}(B)\right).\vec{R} = 0$

On en tire l'équation vectorielle de l'axe central : $\boxed{\vec{BA} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(B)}{\vec{R}^2} + \lambda\,\vec{R}}$

On appellera ***moment central***, la valeur du champ de moment en un point de l'axe central.
Le moment central est invariant pour tout point de l'axe central.
La norme du moment est minimum en tout point de l'axe central.

5.4. Opérations sur les torseurs

Soit $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$, deux torseurs réduits en A. On a : $\{T_1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R_1} \\ \vec{M_1}(A) \end{Bmatrix}$ et $\{T_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R_2} \\ \vec{M_2}(A) \end{Bmatrix}$

$\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \vec{M_1}(A) + \vec{M_2}(A) \end{Bmatrix}$ $\{k\,T\} = {}_A\begin{Bmatrix} k\,\vec{R} \\ k\,\vec{M}(A) \end{Bmatrix}$ avec k réel

On définit le **comoment** des torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ par : $\boxed{\{T_1\} \otimes \{T_2\} = \vec{R_1}.\vec{M_2}(A) + \vec{R_2}.\vec{M_1}(A)}$

5.5. Torseurs particuliers

	Couple	***Glisseur***
Définition	Torseur de résultante nulle pour lequel il existe un point où le moment est non nul $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}(A) \end{Bmatrix}$	Torseur de résultante non nulle, qui admet un point M pour lequel le moment est nul. $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Propriétés	Le moment est alors constant pour tout point de l'espace. Les invariants scalaire et vectoriel d'un couple sont nuls. La somme de deux couples est un couple.	Il admet alors une droite de points pour lesquels le moment est nul. Cette droite est dirigée par $\vec{R}$. Si A appartient à cette droite, (A, $\vec{R}$) est un vecteur glissant. La droite de moment nul est l'axe central du torseur. Son pas est nul. Son invariant scalaire est nul.
Exemples	-Torseur statique d'un arbre moteur cannelé sur un récepteur (moment exprimé en N.m) -Torseur cinématique d'une liaison glissière entre deux pièces (moment exprimé en m/s)	-Torseur statique câble sur charge (résultante en N) -Torseur statique fluide sur piston (résultante en N) -Torseur statique bielle sur levier (résultante en N) -Torseur cinématique pivot (résultante en rad/s)

Exercice 4 : Eléments de réduction d'un torseur

Soit R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct.
Soit A et B deux points définis par leurs coordonnées A(-2, 0, 3) et B(5, -1, 0).

Soit $\{T(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = -3\,\vec{x} + \vec{y} - 2\,\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 2\,\vec{y} + \vec{z} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{Bmatrix}_R$

Q1. Définir les éléments de réduction de $\{T(S/R)\}$ en O, puis en B.

CORRECTION

Exercice 1: $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sin\ (\alpha)$ $\quad -\sin(-\alpha) = sin\ (\alpha)$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = cos\ (\alpha)$

$-\cos(\pi + \alpha) = -cos\ (\alpha)$ $\quad \sin(\pi - \alpha) = sin\ (\alpha)$ $\quad -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -cos\ (\alpha)$

Exercice 2 :

$\overrightarrow{AB} = -7\,\vec{x} - \vec{y} + 3\,\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{CB} = -6\,\vec{x} + \vec{y} + 4\,\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AC} = -\,\vec{x} - 2\,\vec{y} - \vec{z}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = (5\ \times (-7)) + (2 \times (-1)) + (0 \times 3) = -37$

$\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AC} = (-4\ \times (-1)) + (0 \times (-2)) + (1 \times (-1)) = 3$

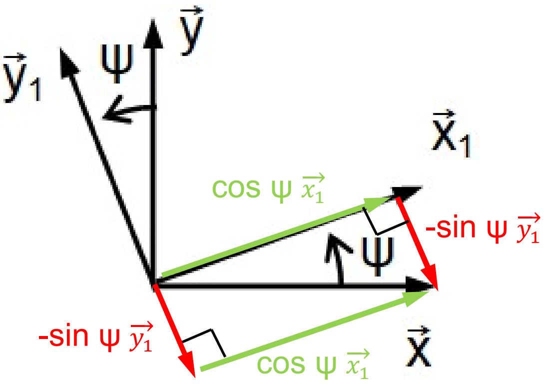
$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = (5\,\vec{x} + 2\,\vec{y}) \wedge (-7\,\vec{x} - \vec{y} + 3\,\vec{z}) = 6\,\vec{x} - 15\,\vec{y} + 9\,\vec{z}$

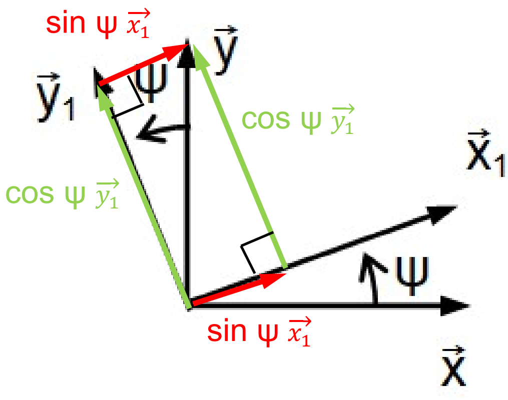
$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CB} = (4\,\vec{x} - \vec{z}) \wedge (-6\,\vec{x} + \vec{y} + 4\,\vec{z}) = \vec{x} - 10\,\vec{y} + 4\,\vec{z}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-7\,\vec{x} - \vec{y} + 3\,\vec{z}) \wedge (-\,\vec{x} - 2\,\vec{y} - \vec{z}) = -7\,\vec{x} - 10\,\vec{y} + 13\,\vec{z}$

$\overrightarrow{OA}.\vec{x} = 5$ $\quad \overrightarrow{AB}.\vec{y} = -1$ $\quad \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\vec{z} = 13$

Exercice 3 :





Q1. $\vec{x}$ = cos ψ $\vec{x_1}$ - sin ψ $\vec{y_1}$ $\qquad$ $\vec{y}$ = cos ψ $\vec{x_1}$ + sin ψ $\vec{y_1}$

Q2. $\vec{x_1}$ = cos ψ $\vec{x}$ + sin ψ $\vec{y}$

$\vec{y_1}$ = cos ψ $\vec{x}$ - sin ψ $\vec{y}$

$\vec{y_2}$= cos θ $\vec{y_1}$ + sin θ $\vec{z_1}$= cos θ (cos ψ $\vec{y}$ - sin ψ $\vec{x}$) + sin θ $\vec{z_1}$

$\vec{y_3}$= cos φ $\vec{y_2}$ - sin φ $\vec{z_2}$ = cos φ [cos θ (cos ψ $\vec{y}$ - sin ψ $\vec{x}$) + sin θ $\vec{z_1}$] - sin φ (cos ψ $\vec{x}$ + sin ψ $\vec{y}$)

Q3.

$\vec{x_1} \wedge \vec{y_1} = \vec{z_1}$ $\quad \vec{y_1} \wedge \vec{x_1} = -\,\vec{z_1}$ $\quad \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$ $\quad \vec{z} \wedge \vec{y} = -\,\vec{x}$

$\vec{x_1} \wedge \vec{z_2} = -\,\vec{y_2}$ $\quad \vec{y_2} \wedge \vec{z_2} = \vec{x_2}$ $\quad \vec{x} \wedge \vec{x_1} = \sin\psi\,\vec{z}$ $\quad \vec{x} \wedge \vec{y_1} = \cos\psi\,\vec{z}$

$\vec{y_2} \wedge \vec{y_1} = -\sin\theta\,\vec{x_1}$ $\quad \vec{x_3} \wedge \vec{x_2} = -\sin\varphi\ \vec{z_2}$ $\quad \vec{y_2} \wedge \vec{z_1} = \cos\theta\ \vec{x_1}$ $\quad \vec{y} \wedge \vec{y_1} = \sin\psi\,\vec{z}$ $\quad \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{0}$

Exercice 4 :

$$\{T(S/R)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} = -3\,\vec{x} + \vec{y} - 2\,\vec{z} \\ \vec{M}\,(O) = \vec{M}\,(A) + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} \quad = -3\,\vec{x} - 11\,\vec{y} - \vec{z} \end{Bmatrix} = {}_O\left\{\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -3 \\ -11 \\ -1 \end{matrix}\right\}_R$$

$$\{T(S/R)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} = -3\,\vec{x} + \vec{y} - 2\,\vec{z} \\ \vec{M}\,(B) = \vec{M}\,(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \quad = -5\,\vec{x} - 21\,\vec{y} - 3\,\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_O\left\{\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -5 \\ -21 \\ -3 \end{matrix}\right\}_R$$