Activité S1.2 : Résultats numériques et incertitudes

Les différents principes que vous allez voir sont à utiliser à toutes occasions, exercice en cours, TD, DS, compte rendu de TP.

Notation des résultats numériques et chiffres significatifs
Les chiffres significatifs d'un nombre comprennent tous les chiffres dont on est certain ainsi que le premier chiffre incertain. Les valeurs entières ne sont pas concernées par ces règles.

Règles pour déterminer le nombre de chiffres significatifs :

- Ne tenir aucun compte de tous les zéros initiaux.
- Ne tenir aucun compte de tous les zéros finaux sauf s'ils suivent une virgule.
- Tous les chiffres restants sons significatifs, y compris les zéros entre des chiffres non nuls.

Par exemple :

0,0**3024** L a 4 chiffres significatifs (4 CS)
2,0 L a 2 chiffres significatifs (2 CS)

Par contre, si je note 2000 mL le nombre de chiffre significatif peut être 1, 2, 3 ou 4, d'où l'intérêt de la notation scientifique.

Il faut exprimer les données en notation scientifique afin d'éviter toute confusion entre les zéros terminaux significatifs ou non.

Ici par exemple :

2,0.10^3 mL a 2 chiffres significatifs (2 CS)

activité 2.1 Chiffres significatifs

Pour chaque nombre, noter le en notation scientifique (avec 1 seul chiffre avant la virgule) et donner le nombre de CS :

1°) 70,845
2°) – 18,67.10^3
3°) 0,010
4°) 200,0.10^{-3}
5°) 1 235 mg

Résultats numériques, arrondi et chiffres significatifs
Le nombre de chiffres significatifs va donner la précision de votre résultat numérique. Il faut donc prendre en comte trois points : le résultat numérique de vos calculs, le nombre de chiffres significatifs de votre résultat et la méthode d'arrondi.

Lors de l'arrondissement il faut prendre en compte la valeur du chiffre de « sécurité » qui est le premier chiffre <u>non</u> significatif du nombre. Si vous arrondissez un nombre dont le chiffre de « sécurité » vaut 5, il <u>faut toujours</u> que votre résultat se termine par un chiffre pair.

activité 2.2 Arrondis

Reprendre les nombres de l'activité 2.1, sauf le 3°), et donner leur notation arrondie avec 3 CS.

Opérations et chiffres significatifs
La détermination du nombre approprié de chiffres significatifs dans le résultat de combinaison algébrique de plusieurs nombres requiert certaines précautions.

<u>Sommes et différences</u>

Vous avez probablement déjà entendu dire qu'une chaîne n'est pas plus résistante que son maillon le plus faible. Pour une addition ou une soustraction, **<u>le maillon faible est le nombre comportant le plus petit nombre de décimales (si ceux-ci sont exprimés à la même puissance de 10)</u>**.

Par exemple : $3{,}\mathbf{4} + 0{,}020 + 7{,}31 = 10{,}73 = 10{,}\mathbf{7}$

Le résultat a trois chiffres significatifs (3 CS) alors que deux des termes n'en comporte que deux.

Pour des nombres donnés en notation scientifique, il **FAUT** les exprimer dans la même puissance de 10 pour comparer leurs décimales, on choisit la puissance de 10 la plus grande.

Par exemple :

$$\begin{array}{rl} 2{,}432\ 1.10^6 = & 2{,}432\ 1.10^6 \\ +\ 6{,}512\ 8.10^4 = & +\ 0{,}065\ 128.10^6 \\ -\ 1{,}23.10^5 = & -\ 0{,}12\mathbf{3}.10^6 \\ \hline & = 2{,}37\mathbf{4}\ 228.10^6 \\ & = 2{,}37\mathbf{4}.10^6 \text{ (4 CS)} \end{array}$$

<u>Produits et quotients</u>

Pour une multiplication ou une division, **<u>le maillon faible est le nombre comptant le plus petit nombre de chiffres significatifs</u>**. Le nombre de chiffres significatifs du résultat est normalement égal à ce dernier. Utilisez cette règle empirique avec circonspection, car elle conduit parfois à un résultat incorrect. On préférera utiliser une méthode numérique dite de « Monte-Carlo ».

Par exemple : $\frac{2{,}4\times4{,}52}{100{,}0}=0{,}1084=0{,}11$ (2 CS) et $\frac{2{,}4\times4{,}02}{100{,}0}=0{,}09648=0{,}096$ (2 CS)

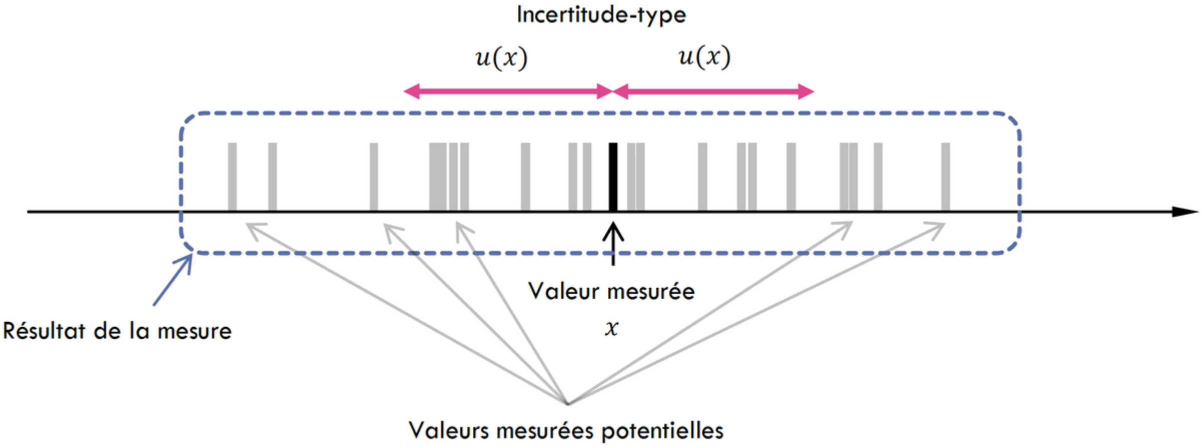
Mais en y regardant de plus prés les incertitudes relatives de ces calculs, on constate qu'elles sont toutes les deux de 1/24, ce qui donne des incertitudes de l'ordre de 0,004 dans les deux cas et donc le premier résultat devrait être arrondi à 0,108 c'est-à-dire un nombre à trois chiffres significatifs.

activité 2.3 Opérations

Pour chaque opération, donner le résultat et sa notation avec le bon nombre de CS :

1°) $12{,}5 + 0{,}01 + 8{,}56 - 7{,}084$
2°) $545 - 18{,}67.10^3 + 2{,}0.10^6$
3°) $\frac{12{,}5\times0{,}01\times8{,}56}{7{,}084}$
4°) $\frac{45\times1{,}67.10^3}{(53{,}4\times2{,}0.10^6)}$
5°) 5,2 g + 0,825 kg + 1 234 mg
6°) $\frac{(8{,}358\ \text{kg})}{(3{,}0\ \text{m})\times(154\ \text{cm})\times(12\ \text{dm})}$

Incertitudes types



L'idée centrale est la variabilité de la mesure. On considère que le résultat d'une mesure n'est pas une valeur unique, mais un ensemble de valeurs numériques, raisonnablement attribuables à la grandeur étudiée :

- La valeur mesurée est une valeur particulière de cet ensemble.
- L'incertitude est une indication de la dispersion de cet ensemble.
- L'incertitude-type est une incertitude évaluée à l'aide d'un écart-type.

Évaluation de type A

L'incertitude-type associée à une observation unique exprime la variabilité potentielle d'une observation. Elle quantifie les fluctuations typiques d'une observation à l'autre.

Si on dispose de plusieurs observations, cette variabilité n'est autre que leur dispersion. Pour l'évaluer, on utilise l'écart-type de l'ensemble des observations réalisées. On la note : u(x).

Souvent, lorsqu'on a plusieurs observations, on est intéressé par la moyenne. La moyenne est une manière de compenser les observations élevées par celles qui sont plus basses. Elle est plus juste qu'une observation unique. Sur la base de N observations, on calcule une moyenne unique $\overline{x}$ et on évalue l'incertitude-type de cette moyenne par $u(\overline{x})=\frac{u(x)}{\sqrt{N}}$

Évaluation de type B

Les instruments dont la résolution est limitée substituent une unique valeur à l'ensemble des valeurs inhérentes à la mesure ; elles sont de ce point de vue problématiques.

Que fait-on en pratique, si on a peu d'information sur le mesurande, ou que la notice d'un constructeur ne donne qu'une "précision" ?

- on définit un intervalle au sein duquel on est (raisonnablement) "certain" que le résultat de mesure se trouve.
- on fait l'hypothèse raisonnable que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire à densité uniforme, entre deux bornes : [x − m ; x + m] (distribution dite rectangulaire).
- on en déduit l'incertitude-type : l'écart-type associé à une distribution rectangulaire est égal à la demi-étendue de la distribution, divisée par $\sqrt{3}$: $u(x)=\frac{m}{\sqrt{3}}$

Il est tout à fait possible de justifier ce facteur soit mathématiquement, soit numériquement, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo.

Écriture des résultats

On utilisera 2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type u(x).
Conséquences : si on mesure 10,0 cm avec une règle graduée au mm et si on est certain que la longueur mesurée est comprise entre 9,95 et 10,05 cm.
L'intervalle des valeurs raisonnablement attribuables est 10,00 ± 0,05 cm donc l'incertitude-type correspondante est : $\frac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}0288\,cm$
On arrondit celle-ci à 2 chiffres significatifs et on écrit donc : ℓ = 10,000 cm ; u (ℓ) = 0,029 cm

activité 2.4 Incertitude de type B

On utilisera un tableur (libre Office par exemple), on note x la valeur mesurée, m la demi-étendue du domaine d'étude.

On génère un nombre aléatoirement entre 0 et 1 (fonction =ALEA()) dans une première cellule.

On calcule une valeur xi par le calcul (= x + (2*nb_aleatoire – 1)*m) dans une cellule adjacente.

On copie les deux cellules sur N lignes.

On calcule la moyenne des N xi : $\bar{x}$ (=MOYENNE()).

On calcule l'écart-type des N xi : u(x) (=ECARTYPE()).

On note le résultat et l'incertitude-type.

On compare à la valeur de l'incertitude de type B.

Application : prendre x = 6,4 et m = 0,1 puis 0,01.

Composition des incertitudes par une simulation Monte-Carlo

Connaissant un résultat de mesure X représenté par la valeur mesurée x et l'incertitude type u(x). Comment calculer l'incertitude-type de X^2 par exemple ?

- X est modélisable par une variable aléatoire qui représente l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuables au mesurande. On peut faire une expérience simulée qui consiste à obtenir un grand nombre de réalisations x_i de X. Cette collection de x_i représente le résultat d'une mesure, et d'autant plus fidèlement qu'il y a de valeurs.
- On peut retrouver la valeur mesurée x en prenant la moyenne de cette collection de valeurs, et l'incertitude-type en en prenant l'écart-type. C'est une évaluation de type A.
- On peut également calculer la collection des x_i^2, et appliquer la même procédure. En prenant l'écart-type de l'ensemble des x_i^2, on trouve l'incertitude-type de X^2, de la même manière.

activité 2.5 Calcul des incertitudes des fonctions logarithme décimale et exponentielle

On reprend le tableur de l'activité 2.4.

On calcule la valeur log(xi) et exp(xi) dans deux nouvelles cellules adjacentes.

On la copie sur N lignes.

On calcule les deux moyenne des N cellules d'une même colonne : $\overline{\log(x)}$ et $\overline{\exp(x)}$.

On calcule les écart-types des N cellules d'une même colonne : u(log(x)) et u(exp(x)).

On note les résultats et les incertitude-types.

On compare à la valeur de log(x) et de exp(x).

Application : prendre x = 6,4 et m = 0,1 puis 0,01.