Exercices PCSI
É.Bouchet

Ensembles

Exercice 1 ($\bigstar$). Traduire la définition des ensembles suivants avec des notations ensemblistes.

1. F_1 : l'ensemble des carrés parfaits (c'est-à-dire 1, 4, 9, 16, etc.), à écrire de deux façons différentes.
2. F_2 : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont décroissantes.
   On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Résultat attendu :

1. $F_1 = \left\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = k^2\right\}$ (variante : $F_1 = \{n \in \mathbb{N} | \sqrt{n} \in \mathbb{N}^*\}$) et $F_1 = \left\{k^2 | k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2. $F_2 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)\right\}$.

Exercice 2 ($\bigstar$). On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

$A = \{$ les deux cartes tirées sont rouges $\}$
$B = \{$ les deux cartes tirées sont un valet et un dix $\}$
$C = \{$ les deux cartes tirées sont des figures $\}$

1. Que représentent les ensembles suivants ?
   (a) $\overline{A}$ (b) $A \cap B \cap \overline{C}$ (c) $(A \cap B) \cap C$ (d) $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$
2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :
   $F = \{$ les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges $\}$
   $G = \{$ on obtient au plus une figure $\}$

Résultat attendu :

1. (a) $\overline{A} = \{$ une carte au moins n'est pas rouge $\}$.
   (b) $A \cap B \cap \overline{C} = \{$ on tire un valet rouge et un dix rouge $\}$.
   (c) $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ car $B \cap C = \emptyset$.
   (d) $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) = \{$ on tire un valet rouge et un dix rouge $\}$.
2. $F = C \cap \overline{A} = C \setminus A$ et $G = \overline{C}$.

Exercice 3 ($\bigstar\bigstar$). On lance une infinité de fois une pièce équilibrée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{$ obtenir Pile au n-ième lancer $\}$. Écrire les événements suivants à l'aide des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

1. $A = \{$ obtenir le premier pile au 10-ième lancer $\}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{$ obtenir le premier pile au k-ième lancer $\}$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \{$ obtenir le premier pile au plus tard au k-ième lancer $\}$.
4. $B = \{$ obtenir au moins un pile $\}$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \{$ la longueur de la première succession de Pile ou de Face est k $\}$.

Résultat attendu :

1. $A = \left(\bigcap_{i=1}^{9} \overline{P_i}\right) \cap P_{10}$.
2. $A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{P_i}\right) \cap P_k$.
3. $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$.
4. $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i$.
5. $C_k = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{P_i}\right) \cap P_{k+1}\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i\right) \cap \overline{P_{k+1}}\right)$.

L'expression du dernier cas est longue car il faut s'assurer que la longueur soit *exactement* k et pas davantage.

Exercice 4 ($\bigstar$). Soit E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right)$
2. $B = (X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right)$
3. $C = (X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) \cup \left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right)$
4. $D = (X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right) \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) \cap \left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$

Résultat attendu :

1. $A = X \cap \left(Y \cup \overline{Y}\right) = X$
2. $B = X \cup \left(Y \cap \overline{Y}\right) = X$
3. $C = X \cup \overline{X} = E$
4. $D = X \cap \overline{X} = \emptyset$

Les deux derniers calculs s'obtiennent à l'aide des résultats des deux premiers.

Exercice 5 (★★). Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B.$$

Résultat attendu : On montre successivement les deux implications (le sens direct par double inclusion, la réciproque par calcul direct).

Exercice 6 (★★★). Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] = \emptyset$.

Résultat attendu : On procède par double inclusion, en utilisant un calcul de limite pour l'inclusion non évidente.

Exercice 7 (★). Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 210 et 225 et en déduire leur PGCD et PPCM.

Résultat attendu : $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ donc le PGCD vaut 15 et le PPCM 3150.

Exercice 8 (★★). Lister les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ qui vérifient $\mathrm{PGCD}(x, y) = 5$ et $\mathrm{PPCM}(x, y) = 60$.

Résultat attendu : Une décomposition en facteurs premiers donne $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. Les seuls couples solutions sont donc $(5, 60)$, $(60, 5)$, $(15, 20)$ et $(20, 15)$.

Exercice 9 (Type DS)**.** Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensemble A et B de E, on pose $A \triangledown B = \overline{A \cup B}$.

1. Soit A un sous-ensemble de E. Exprimez $\overline{A}$ à l'aide de A et de l'opération $\triangledown$.
2. Soit A et B deux sous-ensembles de E, calculer et simplifier $(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)$.
3. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Exprimer $A \cup B$ et $A \setminus B$ à l'aide de A, B et de la loi $\triangledown$ uniquement.
   Remarque : cela signifie qu'il ne faut laisser ni union, ni intersection, ni complémentaire dans le résultat de cette question.

Résultat attendu :

1. Il suffit de remarquer que $A = A \cup A$, et donc $\overline{A} = \overline{A \cup A} = A \triangledown A$.
2. D'après la question précédente et en utilisant les propriétés du complémentaire :
$$(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B) = \overline{A} \triangledown \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B.$$
3. Les questions précédentes et la définition de $\triangledown$ donnent :
$$A \cup B = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \triangledown B} = (A \triangledown B) \triangledown (A \triangledown B) \quad \text{et} \quad A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B} = \overline{A} \triangledown B = (A \triangledown A) \triangledown B.$$