

Sommes et produits

Cours de É. Bouchet – PCSI

20 septembre 2023

Table des matières

1	Sommes	2
1.1	Généralités	2
1.2	Premiers calculs de sommes	2
1.3	Changements d'indices et regroupements de termes	4
1.4	Télescopages	5
1.5	Sommes et puissances	5
1.6	Sommes doubles	6
2	Produits	7
2.1	Généralités	7
2.2	Factorielle	8
3	Coefficients binomiaux	9
3.1	Premiers calculs	9
3.2	Propriétés et formules	9

1 Sommes

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Somme)

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq n$ et u une suite de réels, on note $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{i=p}^n u_i$.

Remarque. La somme $\sum_{i=p}^n u_i$ contient $n - p + 1$ termes.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\sum_{i=p}^n u_i = 0$ par convention.

Définition 1.2 (Indice, bornes)

Dans la somme $\sum_{i=p}^n u_i$, i s'appelle **l'indice**, p et n sont **les bornes** de la somme.

Remarque. L'indice d'une somme est dit muet, ce qui signifie que l'on peut écrire : $\sum_{i=p}^n u_i = \sum_{j=p}^n u_j$.

Remarque. On peut aussi noter $\sum_{0 \leq k \leq n} u_k$ ou $\sum_{k \in A} u_k$ avec A un sous-ensemble fini de \mathbb{N} . On a par exemple :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k = \sum_{k \in [0, n]} u_k.$$

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, simplifier les écritures suivantes : $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}}$, puis $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ termes}}$, puis $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$, puis $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$, puis $1 + 3 + 5 + \dots + 2013$.

Solution :

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^n 1, \quad \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^n a, \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i,$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^n (2i + 1), \quad 1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = \sum_{i=0}^{1006} (2i + 1).$$

Remarque. On déduit entre autres de ces écritures que $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq p$, $\sum_{k=p}^n 1 = n - p + 1$.

1.2 Premiers calculs de sommes

Proposition 1.3 (Somme des premiers entiers)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : \left\langle \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\rangle$.

$$- \sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \times 1}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0 \times 1 \times 1}{6} \text{ donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 \right).$$

$$\text{Or } \frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 = \frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

On a donc montré le résultat annoncé. \square

Remarque. Ces formules restent vraies en faisant partir les sommes de 1, puisque les termes en 0 sont nuls.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^2$.

$$\text{Solution : } \sum_{k=0}^{2n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}.$$

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=2}^{11} k^2$.

$$\text{Solution : } \sum_{k=2}^{11} k^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 - 1^2 = \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 1 = 11 \times 2 \times 23 - 1 = 506 + 1 = 505.$$

Proposition 1.4 (Linéarité de la somme)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et x, y des suites de réels. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^n (x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=p}^n x_k + \lambda \sum_{k=p}^n y_k$.

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales. Sinon, il suffit de se ramener à l'écriture avec des points de suspension :

$$\sum_{k=p}^n (x_k + \lambda y_k) = x_p + \lambda y_p + x_{p+1} + \lambda y_{p+1} + \dots + x_n + \lambda y_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n + \lambda y_p + \lambda y_{p+1} + \dots + \lambda y_n = \sum_{k=p}^n x_k + \lambda \sum_{k=p}^n y_k.$$

\square

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n k(k-2)$.

$$\text{Solution : Par linéarité, } \sum_{k=0}^n k(k-2) = \sum_{k=0}^n k^2 - 2 \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n ki \right)$.

$$\text{Solution : Par linéarité, } \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n ki \right) = \sum_{i=1}^m \left(i \sum_{k=1}^n k \right) = \sum_{i=1}^m \left(i \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^m i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}.$$

1.3 Changements d'indices et regroupements de termes

Proposition 1.5 (Changements d'indices)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, u une suite de réels et $k \in \mathbb{Z}$.

- En posant $j = i + k$, on effectue un **changement d'indice par translation** : $\sum_{i=p}^n u_{i+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$.
- En posant $j = k - i$, on effectue un **changement d'indice par retournement** : $\sum_{i=p}^n u_{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j$.

Remarque. ATTENTION : il est interdit de « sauter » des indices, par exemple de poser $k = 2i$ (ce qui reviendrait à ne prendre que les termes pairs).

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales.

Sinon, on a d'une part : $\sum_{i=p}^n u_{i+k} = u_{p+k} + u_{p+1+k} + \dots + u_{n+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$, et d'autre part :

$$\sum_{i=p}^n u_{k-i} = u_{k-p} + u_{k-p-1} + \dots + u_{k-n} = u_{k-n} + \dots + u_{k-p-1} + u_{k-p} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j.$$

□

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$.

Solution : Poser $j = k - 1$ donne $\sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{i=1}^n (n-i)^2$.

Solution : Poser $j = n - i$ donne $\sum_{i=1}^n (n-i)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Proposition 1.6 (Regroupements des indices pairs et impairs)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et u une suite de réels, $\sum_{p=0}^{2n} u_p = \sum_{p=0}^n u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$.

Démonstration.

$$\sum_{p=0}^{2n} u_p = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n-1} + u_{2n} = (u_0 + u_2 + \dots + u_{2n}) + (u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1}) = \sum_{p=0}^n u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}.$$

□

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$.

Solution : Regrouper les indices pairs et impairs donne :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2k(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^n 2k - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1,$$

d'où $S_n = 2 \frac{n(n+1)}{2} - 2 \frac{n(n-1)}{2} - n = n((n+1) - (n-1) - 1) = n$.

1.4 Télescopes

Proposition 1.7 (Somme télescopique)

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tous entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, on a $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

Démonstration. On développe par linéarité, puis simplifie grâce à un changement d'indice :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=p}^n u_{k+1} - \sum_{k=p}^n u_k \\ &= \sum_{i=p+1}^{n+1} u_i - \sum_{k=p}^n u_k \quad \text{en posant } i = k + 1 \\ &= u_{n+1} + \sum_{i=p+1}^n u_i - u_p - \sum_{k=p+1}^n u_k \\ \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) &= u_{n+1} - u_p \end{aligned}$$

□

Remarque. Cette formule s'adapte de manière directe à toute différence de termes consécutifs. En particulier,

$$\sum_{k=p}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{p-1}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Solution : On procède par télescope, mais il faut commencer par les faire apparaître :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+1} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \\ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

1.5 Sommes et puissances

Proposition 1.8 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = n + 1$, sinon $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$, si $q = 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$ car la somme contient $n + 1$ termes.

Si $q \neq 1$, on trouve par télescope :

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = -q^{n+1} - (-1) = 1 - q^{n+1}.$$

En divisant par $1 - q \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

□

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Soit $q \neq 1$. On peut montrer de même que :

$$\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = q^p \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}.$$

Ce résultat se retrouve par changement d'indice en posant $j = k - p$: $\sum_{k=p}^n q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}$.

Proposition 1.9 (Identité remarquable)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

Démonstration. On procède par linéarité puis télescopage :

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} b^k - a^{n-(1+k)} b^{k+1}) = a^{n-0} b^0 - a^{n-(1+n-1)} b^{n-1+1} = a^n - b^n.$$

□

Remarque. Contrairement aux précédentes, cette formule est davantage utilisée dans le sens qui fait apparaître la somme, pour factoriser par $a - b$.

Exemple. On a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, ainsi que $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

1.6 Sommes doubles

Lorsqu'on a une somme double où les indices des deux sommes ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir les sommes, et donc sommer dans l'ordre qu'on préfère (c'est le cas notamment de la somme de l'exercice 5). Ce n'est pas le cas si les indices dépendent l'un de l'autre.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i$.

Solution : On commence par chercher l'expression la plus simple : $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n i = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i$

(ces formules s'obtiennent par exemple en dessinant un triangle où i est en abscisse et j en ordonnée). Ici, la deuxième expression permet de se ramener facilement aux formules de cours :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j i \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n j \\ &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)(2n+4) \\ \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Proposition 1.10 (Produit de sommes)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et a, b deux suites de réels, alors $\left(\sum_{j=0}^n a_j\right) \left(\sum_{i=0}^p b_i\right) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq p}} a_j b_i$.

Démonstration. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^n a_j\right) \left(\sum_{i=0}^p b_i\right) &= a_0 \left(\sum_{i=0}^p b_i\right) + a_1 \left(\sum_{i=0}^p b_i\right) + \dots + a_n \left(\sum_{i=0}^p b_i\right) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + \dots + a_0 b_p + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_1 b_p + \dots + a_n b_0 + a_n b_1 + \dots + a_n b_p \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq p}} a_j b_i. \end{aligned}$$

□

Remarque. En particulier, $\left(\sum_{j=0}^n a_j\right)^2 = \sum_{j=0}^n a_j^2 + 2 \sum_{0 \leq j < i \leq n} a_j a_i$. En effet,

$$\left(\sum_{j=0}^n a_j\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^n a_j\right) \left(\sum_{i=0}^n a_i\right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_j a_i = \sum_{j=0}^n a_j^2 + \sum_{0 \leq j < i \leq n} a_j a_i + \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_j a_i = \sum_{j=0}^n a_j^2 + 2 \sum_{0 \leq j < i \leq n} a_j a_i.$$

Exemple. Cette formule permet de développer facilement des expressions usuelles. Par exemple,

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_2 a_3.$$

2 Produits

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Produit)

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq n$ et u une suite de réels, on note $u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n = \prod_{i=p}^n u_i$.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\prod_{i=p}^n u_i = 1$ par convention.

Remarque. Comme dans le cas des sommes, il est possible d'effectuer des changements d'indice sur des produits.

On retrouve également le nombre de termes : le produit $\prod_{i=p}^n u_i$ contient $n - p + 1$ termes.

Proposition 2.2 (Produit télescopique)

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Pour tous entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, on a $\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Démonstration. On développe puis simplifie grâce au changement d'indice $i = k + 1$:

$$\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\prod_{k=p}^n u_{k+1}}{\prod_{k=p}^n u_k} = \frac{\prod_{i=p+1}^{n+1} u_i}{\prod_{k=p}^n u_k} = \frac{u_{n+1} \times \prod_{i=p+1}^n u_i}{u_p \times \prod_{k=p+1}^n u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}.$$

□

Remarque. Attention : il n'y a pas de linéarité du produit.

Proposition 2.3 (Multiplication par une constante)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$ et u_p, \dots, u_n des réels,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=p}^n (\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n u_k.$$

Démonstration. On trouve par calcul $\prod_{k=p}^n (\lambda u_k) = \lambda u_p \times \lambda u_{p+1} \times \dots \times \lambda u_n = \lambda^{n-p+1} \times u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n$. □

2.2 Factorielle

Définition 2.4 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** n la quantité : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$.

Exemple. $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Toute autre formule pour simplifier des notations factorielles est fautive, on ne peut notamment pas simplifier $(2n)!$

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

Solution :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \dots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p}{2p} \\ &= \frac{(2p)!}{2^{2p} \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \dots \times (p-1) \times (p-1) \times p \times p} \\ \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}. \end{aligned}$$

3 Coefficients binomiaux

3.1 Premiers calculs

Définition 3.1 (Coefficients binomiaux)

Soit $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.
- Si $n < 0$ ou $p \notin \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Si de plus $n \neq 0$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \times 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 12. Calculer $\binom{8}{4}$.

Solution : Un calcul direct donne $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$.

Proposition 3.2 (Formule de Pascal)

$$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \text{ on a } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a aussi $p-1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \left(1 + \frac{p}{n-p} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \left(\frac{n}{n-p} \right) \\ \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 0$, $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{0} + 0 = 1 = \binom{n}{0}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = n$, $\binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + 1 = 1 = \binom{n}{n}$. Dans tous les autres cas, les deux membres de la formule sont nuls dont égaux.

La formule est donc vraie pour tout couple d'entiers différent de $(0, 0)$. □

Remarque. Le tableau suivant, appelé triangle de Pascal, permet de retrouver facilement les petits coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

3.2 Propriétés et formules

Proposition 3.3 (Symétrie)

$$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2, \text{ on a } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Exemple. $\binom{8}{2} = \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $n - p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et la définition donne : $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$.
Sinon, les deux termes sont nuls. Dans tous les cas, il y a donc égalité. \square

Proposition 3.4 (Formule "sans nom")

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

Démonstration. Si $n \geq 1$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (sinon, les termes sont nuls donc égaux), on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1},$$

où la dernière égalité est valide car on a bien $p-1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. \square

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

— $(a+b)^0 = 1$, et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par } P(n) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{en posant } i = k+1 \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} && \text{en séparant } i=0 \text{ et } k=n+1 \\ (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{par la formule de Pascal} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Cela montre le résultat annoncé. \square

Exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(1+x)^4$.

Solution : La formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 + \binom{4}{2} x^2 + \binom{4}{3} x + \binom{4}{4} x^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Solution : La formule du binôme de Newton donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Solution : On sait que pour tout entier k non nul, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1},$$

où on a posé $i = k - 1$ puis utilisé la formule du binôme de Newton.