

**Exercice 1 (★).** Déterminer l'ensemble des solutions  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de l'équation  $x + 2y = 3$ . On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions vaut  $\left\{ \left( \lambda, \frac{3-\lambda}{2} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \{(3-2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Exercice 2 (★).** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues  $(x, y, z)$  :

$$1. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

**Résultat attendu :**

1. L'unique solution est  $x = 2, y = -1, z = 3$ .

2. Selon le choix du paramétrage, l'ensemble des  $(x, y, z)$  solutions peut s'écrire  $\left\{ \left( \frac{1-\lambda}{7}, \frac{3+11\lambda}{7}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \left\{ \left( \frac{2-\lambda}{11}, \lambda, \frac{7\lambda-3}{11} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ , ou  $\{(\lambda, 2-11\lambda, 1-7\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

3. L'unique solution est  $x = 1, y = 3, z = -2$ .

**Exercice 3 (★).**

1. Déterminer l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^*$  tels que  $\frac{1}{t} \leq -2$ .

2. Déterminer l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^*$  tels que  $\frac{1}{t} \leq 2t$ .

**Résultat attendu :**

1. L'ensemble des solutions est  $\left[ -\frac{1}{2}, 0 \right[$ .

2. L'ensemble des solutions est  $\left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right[ \cup \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[$ .

**Exercice 4 (★★).** Montrer que :

1. Pour tout  $x \leq 0$ ,  $\frac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leq 1$ .

2. Pour tout  $x \geq 2$ ,  $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2$ .

**Résultat attendu :**

1. On procède par majoration directe.

2. On raisonne par équivalences pour se ramener à une inégalité plus simple à étudier.

**Exercice 5 (★).** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $b \neq 0$ . Encadrer au mieux  $\frac{a}{b}$  (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

$$1. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 1 < a \leq 2 \\ 3 < b \leq 5 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ -3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 0 < b \leq 5 \end{cases}$$

**Résultat attendu :**

$$1. \frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3} \quad 2. \frac{1}{5} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3} \quad 3. -\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3} \quad 4. \text{ Pas de bornes} \quad 5. \frac{1}{5} \leq \frac{a}{b}$$

**Exercice 6 (★★).** Soit  $a > 0$ . Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

$$1. f_1 : \begin{array}{l} [1, 10] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \end{array}$$

$$2. f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{array}$$

$$3. f_3 : \begin{array}{l} [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1-at}{2e^t-1} \end{array}$$

$$4. f_4 : \begin{array}{l} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t^2+1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{array}$$

$$5. f_5 : \begin{array}{l} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$$

**Résultat attendu :**

1. Un minorant est 0, un majorant est  $\ln(10)$ .
2. Un minorant est  $-1$ , un majorant est 1.
3. Un minorant est  $\frac{1}{2e^3-1} - 3a$ , un majorant est 1.
4. Un minorant est  $\frac{-3}{a}$ , un majorant est  $\frac{3}{a} + \ln(2)$ .
5. Un minorant est  $-\frac{1}{a^2}$ , un majorant est  $\frac{a}{1+e^{-1}}$ .

**Exercice 7 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n |i-j|$ .

**Résultat attendu :**  $S = \sum_{j=0}^n \left( j^2 - nj + \frac{n^2+n}{2} \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

**Exercice 8 (★).** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $7 - 4x \leq |x + 5|$ .

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est  $\left[ \frac{2}{5}, +\infty \right[$ .

**Exercice 9 (★★★).** Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation  $\sqrt{2x+22} \geq 1-x$ .

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est  $[-3, +\infty[$ .

**Exercice 10 (★★).** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\lfloor (2x+1)^2 \rfloor = 3$ .

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est  $\left] -\frac{3}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ .

**Exercice 11 (★).** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ .

**Résultat attendu :** On montre que  $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \leq \frac{(n+1)x}{2n}$ , donc la limite vaut  $\frac{x}{2}$  par théorème d'encadrement.

**Exercice 12** (Type DS). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}}$ .

1. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$ .
2. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Résultat attendu :**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P(n) : \ll u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}} \gg$ .
  - On a  $\frac{3}{2^0} = \frac{3}{1} = 3$  et  $u_0 = 3$ , donc  $u_0 \leq \frac{3}{2^0}$ . Donc  $P(0)$  est vraie.
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $P(n)$  est vraie. Alors  $0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$ .  
On en déduit que  $4 \leq u_n + 4$ , et par croissance de la racine sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $2 \leq \sqrt{u_n + 4}$ . Comme tout est strictement positif, un passage à l'inverse donne  $0 < \frac{1}{\sqrt{u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$ .  
Or  $0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$  par  $P(n)$ . Donc par produit d'inégalités (possible car tous les termes sont positifs),  
 $0 < \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 4}} \leq \frac{3}{2^n} \times \frac{1}{2}$ . Donc  $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2^{n+1}}$  et  $P(n+1)$  est vraie.  
Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$ .
2. D'après la question 1,  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$  car  $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ .  
Donc par théorème d'encadrement,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.