Trigonométrie

Exercice 1 (★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (★★). En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $t \in [-\pi, \pi]$ tels que $\sin(nt) = 0$.

Exercice 4 (★★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $\cos(2x) = \sin x$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, pour $t \neq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 (★★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\sin(4t) + \sin(2t)$.

Exercice 6 (★★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\cos(3t) + \cos(t)$.

Exercice 7 (Type DS). On souhaite résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que x est solution de (E) si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire les solutions de (E).