Réponses temporelles des SLCI

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

2023–2024

Plan du cours

1 2 3 4

Introduction

Ordre d'un système

Modèle de système dynamique

d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ = équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0\ e(t) + a_1\ \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + \cdots + a_m\ \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}(t) = b_0\ s(t) + b_1\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \cdots + b_n\ \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n}(t)$$

vérifiant le principe de causalité ($m \leqslant n$).

Définition (Ordre d'un système)

L'ordre d'un système (causal) correspond au degré de dérivation le plus élevé du signal de sortie dans l'équation différentielle traduisant son comportement.

En conditions de Heaviside :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1\, p + \cdots + a_m\, p^m}{b_0 + b_1\, p + \cdots + b_n\, p^n}$$

Factorisation de la fonction de transfert (pôles p_i et zéros z_j)

Gain

Numérateur d'ordre 1
(zéro réel négatif)

Numérateur d'ordre 2
(paire de zéros complexes conjugués)

$$H(p) = \frac{K \times \prod_{\beta} (1 + \tau_\beta \, p) \times \prod_{\delta} \left(1 + \frac{2\xi_\delta}{\omega_{0\delta}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\delta}^2}\right)}{p^\alpha \times \prod_{\kappa} (1 + \tau_\kappa \, p) \times \prod_{\mu} \left(1 + \frac{2\xi_\mu}{\omega_{0\mu}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\mu}^2}\right)}$$

Intégrateur
(pôle nul)

Premier ordre
(pôle réel négatif)

Second ordre
(paire de pôles complexes conjugués)

Définition (Classe d'une fonction de transfert)

La classe d'une fonction de transfert correspond à son nombre de pôles nuls, c'est à dire le nombre d'intégrateurs.

Système fondamentaux

Système	Fonction de transfert	Constante(s) caractéristique(s)
Gain pur	K	K : gain ([s]/[e])
Intégrateur	$\dfrac{K}{p}$	K : gain ([s]/[e]·s^{-1})
1$^{\text{er}}$ ordre	$\dfrac{K}{1+\tau\, p}$	K : gain ([s]/[e]) ; τ : constante de temps (s).
2$^{\text{e}}$ ordre	$\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$	K : gain ([s]/[e]) ; ω_0 : pulsation propre non amorti (rad/s) ; ξ : facteur d'amortissement $(-)$.

Systèmes à action proportionnelle

Définition (Système à action proportionnelle)

Un système continu et invariant est dit à action proportionnelle si pour toute entrée $e(t)$ sa sortie $s(t)$ lui est proportionnelle :

$$s(t) = K\ e(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{L}} \qquad S(p) = K\ E(p)$$

La constante de proportionnalité K est appelée le gain du système.

La fonction de transfert d'un système à action proportionnelle peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

Systèmes à action proportionnelle

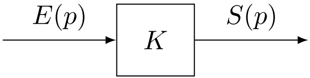
Définition (Système à action proportionnelle)

Un système continu et invariant est dit à action proportionnelle si pour toute entrée $e(t)$ sa sortie $s(t)$ lui est proportionnelle :

$$s(t) = K\ e(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{L}} \qquad S(p) = K\ E(p)$$

La constante de proportionnalité K est appelée le gain du système.

La fonction de transfert d'un système à action proportionnelle peut s'écrire :



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

Exemples de systèmes à action proportionnelle

- Ressort de compression

$$F(t) = k\,\Delta x(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \xrightarrow{\Delta X(p)} \boxed{k} \xrightarrow{F(p)}$$

- Réducteur de vitesse à roue et vis sans fin
  - vis sans fin : vitesse de rotation $\omega_1(t)$ et Z_1 filets ;
  - roue : vitesse de rotation $\omega_2(t)$ et Z_2 dents

$$Z_1\,\omega_1(t) = Z_2\,\omega_2(t)$$

$$\xrightarrow{\Omega_1(p)} \boxed{\frac{Z_1}{Z_2}} \xrightarrow{\Omega_2(p)}$$

Exemples de systèmes à action proportionnelle

- Ressort de compression

$$F(t) = k\ \Delta x(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad \xrightarrow{\Delta X(p)} \boxed{k} \xrightarrow{F(p)}$$

- Réducteur de vitesse à roue et vis sans fin
  - vis sans fin : vitesse de rotation $\omega_1(t)$ et Z_1 filets ;
  - roue : vitesse de rotation $\omega_2(t)$ et Z_2 dents

$$Z_1\ \omega_1(t) = Z_2\ \omega_2(t)$$

$$\xrightarrow{\Omega_1(p)} \boxed{\frac{Z_1}{Z_2}} \xrightarrow{\Omega_2(p)}$$

Systèmes à action proportionnelle

Parmi les systèmes modélisables par un gain pur, on retiendra :

- les transmetteurs de puissances (engrenages, systèmes roue et vis sans fin, systèmes pignon-crémaillère, systèmes vis-écrou, etc.) ;
- les pré-actionneurs (distributeur, hacheur, variateur, etc.) ;
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique, etc.).

Remarque sur l'étude des réponses temporelles
L'étude des réponses temporelles d'un système à action proportionnelle présente peut d'intérêt puisqu'elle se limite à appliquer une transformation d'amplitude du graphe de l'entrée $e(t)$ d'un facteur K.

Systèmes intégrateurs

Définition (Système intégrateur)

Un système intégrateur est un SLCI dont le comportement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$\dot{s}(t) = K\ e(t) \iff s(t) = s(0) + \int_0^t K\ e(t)\ \mathrm{d}t$$

avec K une constante réelle appelée le gain.

En supposant une condition initiale nulle $s(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système intégrateur peut s'écrire :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{p}} \longrightarrow S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Systèmes intégrateurs

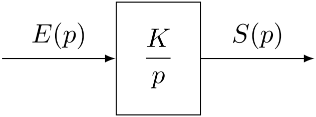
Définition (Système intégrateur)

Un système intégrateur est un SLCI dont le comportement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$\dot{s}(t) = K\ e(t) \iff s(t) = s(0) + \int_0^t K\ e(t)\ \mathrm{d}t$$

avec K une constante réelle appelée le gain.

En supposant une condition initiale nulle $s(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système intégrateur peut s'écrire :



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Systèmes du premier ordre

Définition (Système du premier ordre)

$$s(t) + \tau\, \dot{s}(t) = K\, e(t)$$

- K le gain du système (unité : $[s]/[e]$) ;
- τ la constante de temps du système (en secondes).

En supposant une condition initiale nulle $s(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système du premier ordre peut s'écrire :

$$\xrightarrow{E(p)} \boxed{\frac{K}{1+\tau p}} \xrightarrow{S(p)}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Systèmes du premier ordre

Définition (Système du premier ordre)

$$s(t) + \tau\,\dot{s}(t) = K\,e(t)$$

- K le gain du système (unité : $[s]/[e]$) ;
- τ la constante de temps du système (en secondes).

En supposant une condition initiale nulle $s(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système du premier ordre peut s'écrire :

$$\xrightarrow{E(p)} \boxed{\frac{K}{1+\tau p}} \xrightarrow{S(p)}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Systèmes du second ordre

Définition (Système du second ordre)

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0}\,\dot{s}(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\,\ddot{s}(t) = K\;e(t)$$

- K le gain du système (unité : $[s]/[e]$) ;
- ω_0 la pulsation propre du système non amorti (en rad/s) ;
- ξ le facteur d'amortissement (sans unité).

En supposant des conditions initiales nulles $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système du second ordre peut s'écrire :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Systèmes du second ordre

Définition (Système du second ordre)

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0}\,\dot{s}(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\,\ddot{s}(t) = K\;e(t)$$

- K le gain du système (unité : $[s]/[e]$) ;
- ω_0 la pulsation propre du système non amorti (en rad/s) ;
- ξ le facteur d'amortissement (sans unité).

En supposant des conditions initiales nulles $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 0$, la fonction de transfert d'un système du second ordre peut s'écrire :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Systèmes du second ordre

dénominateur = trinôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}\left(\xi^2 - 1\right)$$

ω_0 est un réel $\Rightarrow$ signe de ce discriminant fonction de ξ.

- deux pôles réels négatifs si $\xi > 1$ $(\Delta > 0)$

  $$p_{1/2} = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) < 0$$

  décomposition de la FT en produit de 2 premier ordre :

  $$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1\, p)\,(1 + \tau_2\, p)}$$

  de constantes de temps $\tau_i = -1/p_i$ $(i = 1, 2)$ vérifiant :

  $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

  On parle de régime apériodique ou de comportement sur-amorti.

Systèmes du second ordre

- un pôle réel négatif double si $\xi = 1$ $(\Delta = 0)$

$$p_{12} = -\omega_0 < 0$$

tel que la fonction de transfert puisse se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau\, p)^2}$$

de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

On parle de régime apériodique crtique ou simplement critique.

Systèmes du second ordre

- deux pôles complexes à partie réelle négative si $0 < \xi < 1$ $(\Delta < 0)$

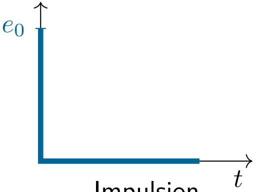
$$p_{1/2} = \omega_0 \left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right) \in \mathbb{C}$$

avec j la variable complexe. La fonction de transfert n'est pas simplifiable :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

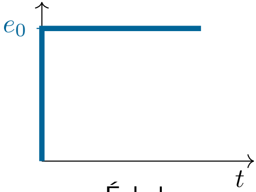
On parle de régime pseudo-oscillant ou de comportement sous-amorti.

- deux pôles imaginaires purs si $\xi = 0 \Rightarrow$ oscillateurs harmoniques.



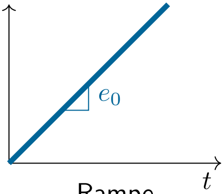
Impulsion

$$e(t) = e_0\ \delta(t)$$



Échelon

$$e(t) = e_0\ u(t)$$



Rampe

$$e(t) = e_0\ t\ u(t)$$

Démarche :

1. transformée de Laplace du signal d'entrée $E(p)$;
2. réponse du système dans le domaine de Laplace $S(p) = H(p)E(p)$;
3. décomposition en éléments simples de $S(p)$;
4. identification des fonctions élémentaires et de leurs transformées de Laplace inverses ;
5. assemblage des contributions et expression de la réponse temporelle $s(t)$.

1 2 3 4

Étude temporelle des systèmes fondamentaux

Système intégrateur : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\,u(t)$$

Système intégrateur : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\,u(t)$$

Système intégrateur : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

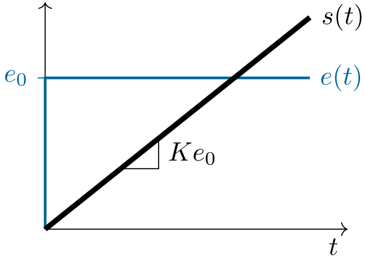
$$s(t) = K\, e_0\, t\, u(t)$$

Système intégrateur : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0\, t\, u(t)$$



Système intégrateur : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

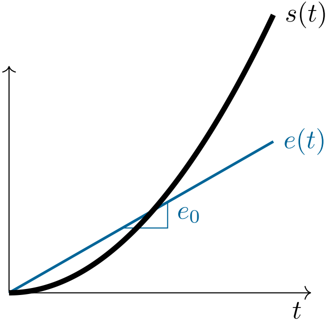
$$s(t) = \frac{1}{2} K e_0\, t^2\, u(t)$$

Système intégrateur : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système intégrateur)

Si un système intégrateur de gain K est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{1}{2} K e_0\, t^2\, u(t)$$



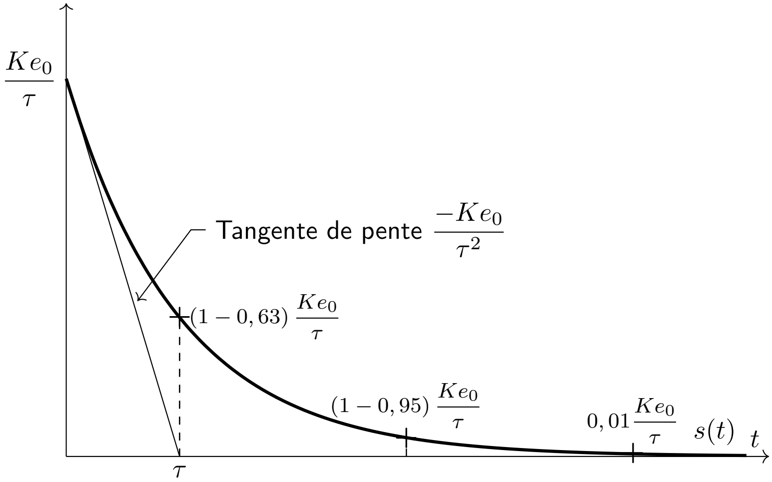
Système du premier ordre : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K\,e_0}{\tau}\,\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)u(t)$$

Système du premier ordre : impulsion



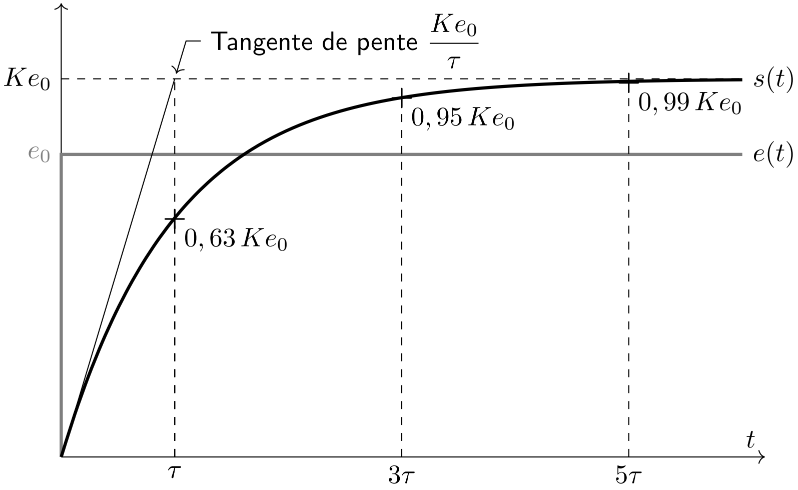
Système du premier ordre : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] u(t)$$

Système du premier ordre : échelon



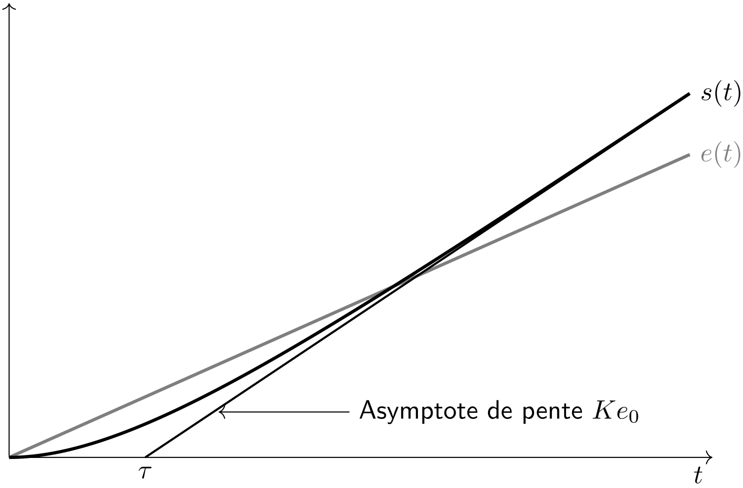
Système du premier ordre : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du premier ordre)

Si un système du premier ordre, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \tau + \tau\ \exp\left(\frac{-t}{\tau} \right) \right] u(t)$$

Système du premier ordre : rampe



Système du second ordre sur-amorti : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K et de constantes de temps τ_1 et τ_2, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K\,e_0}{\tau_1 - \tau_2}\left(\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)\right)u(t)$$

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K, de pulsation propre ω_0 et de facteur d'amortissement $\xi > 1$, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\exp\left(-\omega_0 t\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right) - \exp\left(-\omega_0 t\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)\right]u(t)$$

Système du second ordre sur-amorti : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K et de constantes de temps τ_1 et τ_2, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

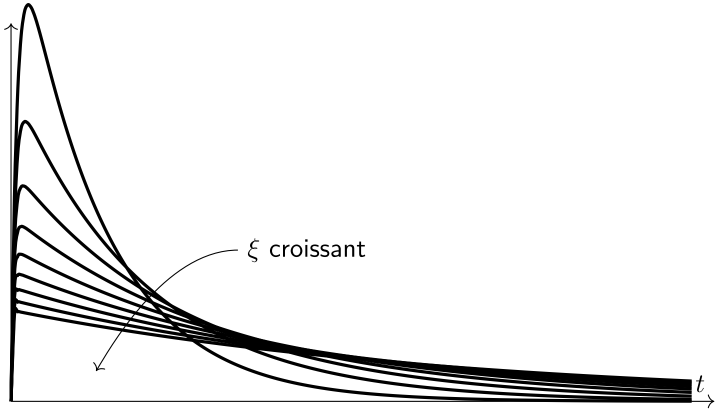
$$s(t) = \frac{K\,e_0}{\tau_1 - \tau_2}\left(\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)\right)u(t)$$

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K, de pulsation propre ω_0 et de facteur d'amortissement $\xi > 1$, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\exp\left(-\omega_0 t\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right) - \exp\left(-\omega_0 t\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right)\right]u(t)$$

Système du second ordre sur-amorti : impulsion



Système du second ordre sur-amorti : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K et de constantes de temps τ_1 et τ_2, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\,u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)\right]u(t)$$

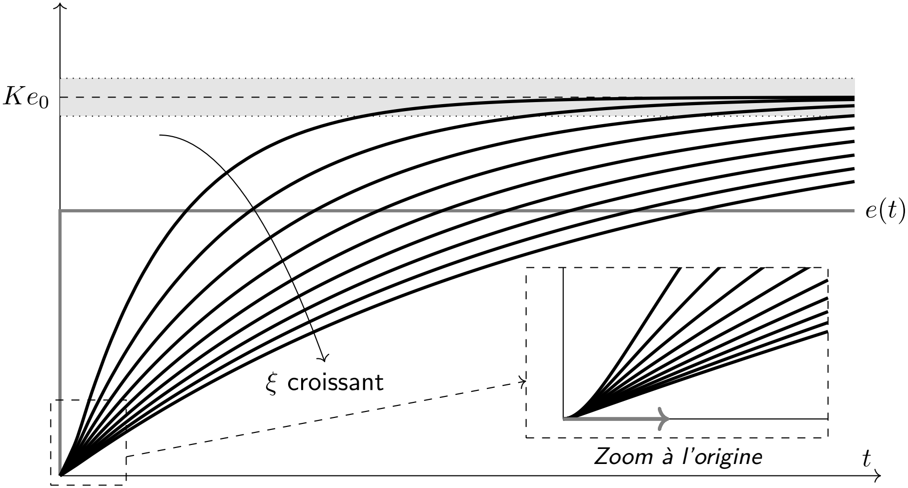
Système du second ordre sur-amorti : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K*, de pulsation propre* ω_0 *et de facteur d'amortissement* $\xi > 1$*, est soumis à une entrée indicielle de la forme* $e(t) = e_0\, u(t)$ *alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right)\right] u(t)$$

Système du second ordre sur-amorti : échelon



Système du second ordre sur-amorti : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K et de constantes de temps τ_1 et τ_2, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right] u(t)$$

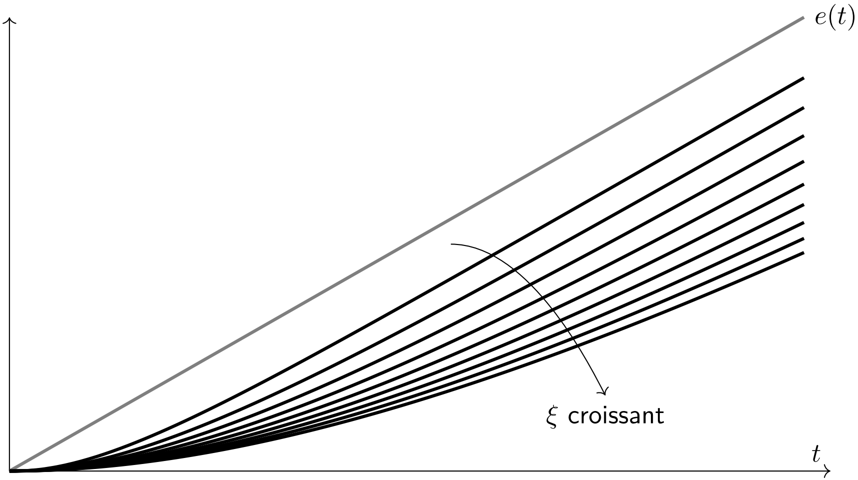
Système du second ordre sur-amorti : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sur-amorti)

Si un système du second ordre sur-amorti, de gain K, de pulsation propre ω_0 et de facteur d'amortissement $\xi > 1$, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \frac{2\xi}{\omega_0} \right.$$
$$+ \frac{1}{2\omega_0\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)} \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right)$$
$$\left. + \frac{1}{2\omega_0\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)} \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) \exp\left(-\omega_0 t \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right) \right] u(t)$$

Système du second ordre sur-amorti : rampe



Système du second ordre critique : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K\,e_0}{\tau^2}\,t\,\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)u(t)$$

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\,\omega_0^2\,t\,\exp\left(-\omega_0 t\right)u(t)$$

Système du second ordre critique : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = \frac{K\,e_0}{\tau^2}\,t\,\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)u(t)$$

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme $e(t) = e_0\,\delta(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\,\omega_0^2\,t\,\exp\left(-\omega_0 t\right)u(t)$$

Système du second ordre critique : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\,u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] u(t)$$

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\,u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\,e_0\left[1 - (1 + \omega_0 t)\exp\left(-\omega_0 t\right)\right] u(t)$$

Système du second ordre critique : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] u(t)$$

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée indicielle de la forme $e(t) = e_0\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - (1 + \omega_0 t) \exp\left(-\omega_0 t\right)\right] u(t)$$

Système du second ordre critique : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - 2\tau + (2\tau + t) \exp\left(\frac{-t}{\tau} \right) \right] u(t)$$

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \frac{2}{\omega_0} + \left(\frac{2}{\omega_0} + t \right) \exp\left(-\omega_0 t \right) \right] u(t)$$

Système du second ordre critique : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de constante de temps τ, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - 2\tau + (2\tau + t) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] u(t)$$

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre en régime critique)

Si un système du second ordre en régime critique, de gain K et de pulsation propre ω_0, est soumis à une entrée en rampe de la forme $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \frac{2}{\omega_0} + \left(\frac{2}{\omega_0} + t\right) \exp\left(-\omega_0 t\right)\right] u(t)$$

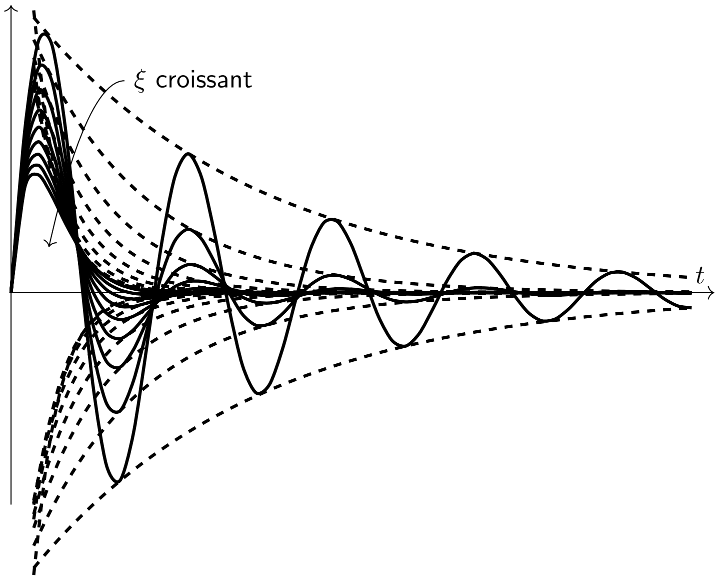
Système du 2^{cd} ordre pseudo-périodique : impulsion

Proposition (Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous-amorti)

Si un système du second ordre sous-amorti, de gain K*, de pulsation propre* ω_0 *et de facteur d'amortissement* $0 < \xi < 1$*, est soumis à une entrée impulsionnelle de la forme* $e(t) = e_0\,\delta(t)$ *alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = \frac{K e_0\ \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}\right)\ \exp\left(-\xi\omega_0 t\right) u(t)$$

Système du 2cd ordre pseudo-périodique : impulsion



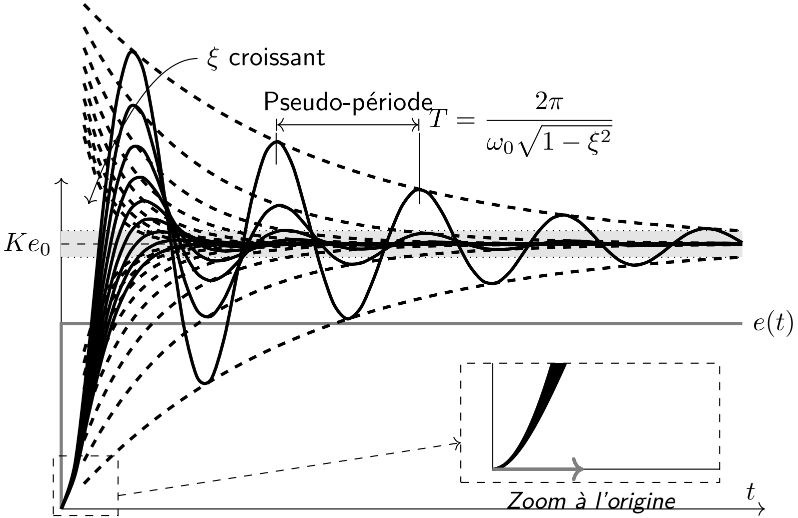
Système du 2$^{\text{cd}}$ ordre pseudo-périodique : échelon

Proposition (Réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti)

Si un système du second ordre sous-amorti, de gain K*, de pulsation propre* ω_0 *et de facteur d'amortissement* $0 < \xi < 1$*, est soumis à une entrée indicielle de la forme* $e(t) = e_0\, u(t)$ *alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \exp\left(-\xi\omega_0\, t\right)\left(\cos\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right)\right] u(t)$$

Système du 2^{cd} ordre pseudo-périodique : échelon



Système du 2$^{\text{cd}}$ ordre pseudo-périodique : échelon

Propriétés :

- pulsation apparente :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

- instant et amplitude du k^{e} dépassement :

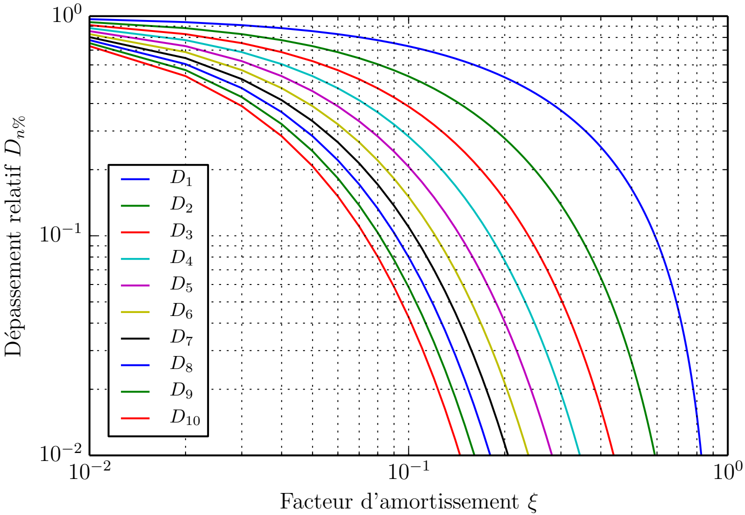
$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \text{et} \qquad D_k = (-1)^{k+1} K e_0 \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

- amplitude relative du k^{e} dépassement :

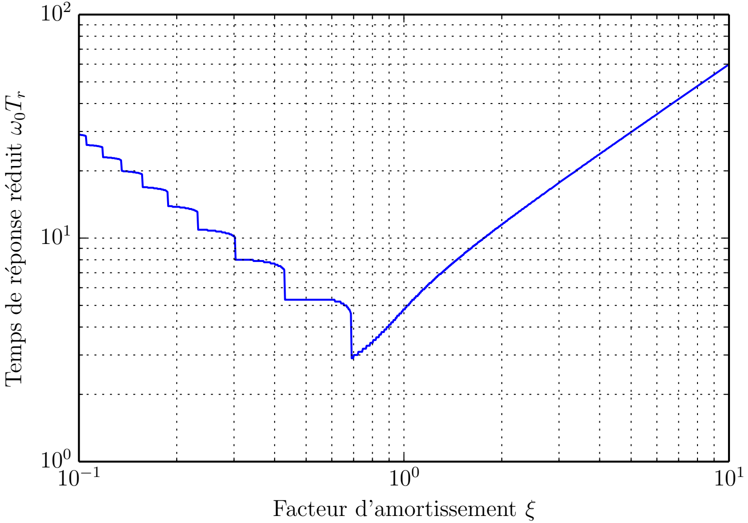
$$D_{k\%} = \left|\frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)}\right| = \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Système du 2cd ordre pseudo-périodique : échelon

Abaque des dépassements relatifs



Abaque du temps de réponse réduit



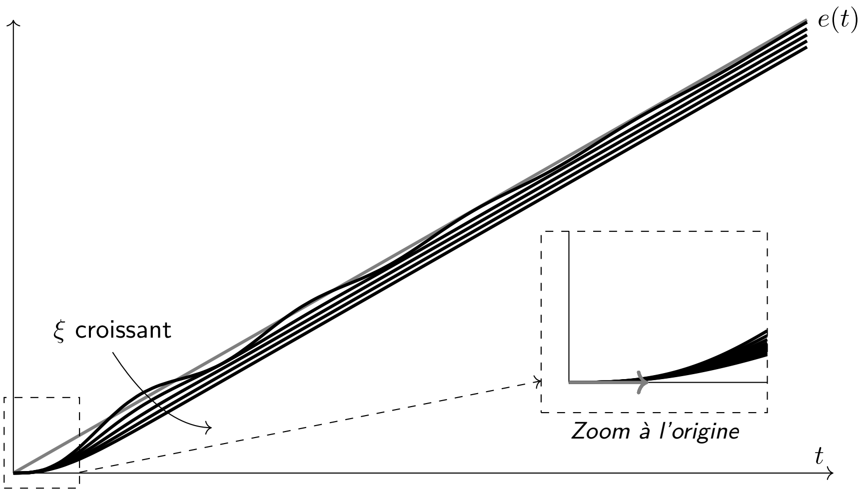
Système du 2^{cd} ordre pseudo-périodique : rampe

Proposition (Réponse à une rampe d'un système du second ordre sous-amorti)

Si un système du second ordre sous-amorti, de gain K, *de pulsation propre* ω_0 *et de facteur d'amortissement* $0 < \xi < 1$, *est soumis à une entrée en rampe de la forme* $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ *alors sa réponse temporelle est donnée par l'expression :*

$$s(t) = K\, e_0 \left[t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \exp\left(-\xi\omega_0 t\right) \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}\right) + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2}\right) \right) \right] u(t)$$

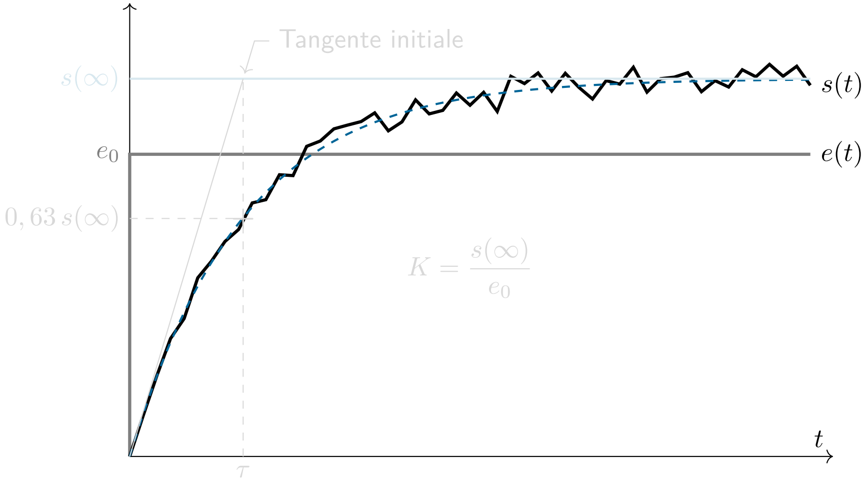
Système du 2^{cd} ordre pseudo-périodique : rampe



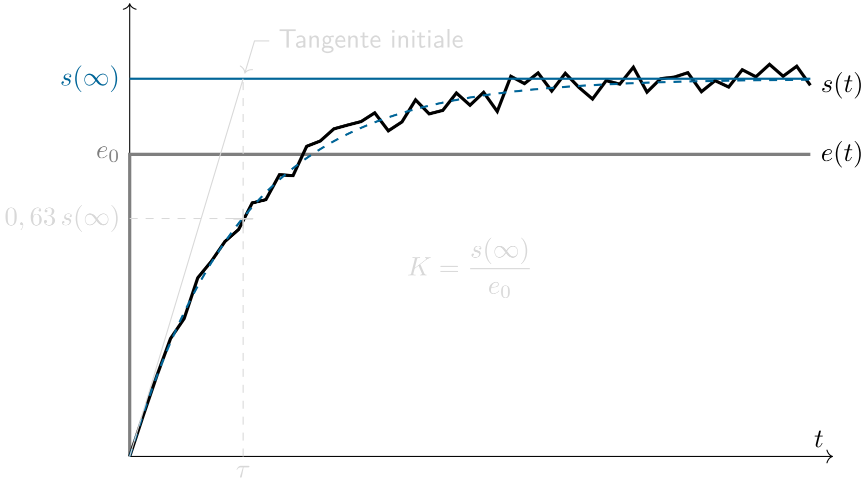
1 2 3 4

Identification d'un modèle de comportement

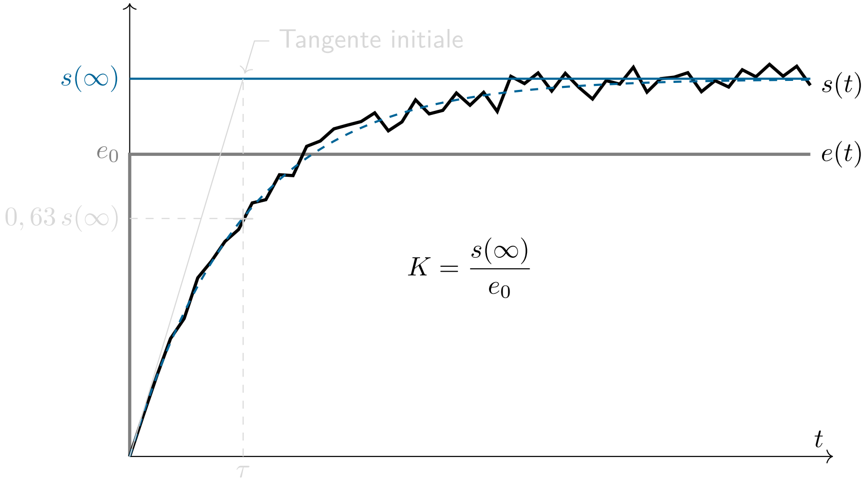
Identification d'un modèle du premier ordre



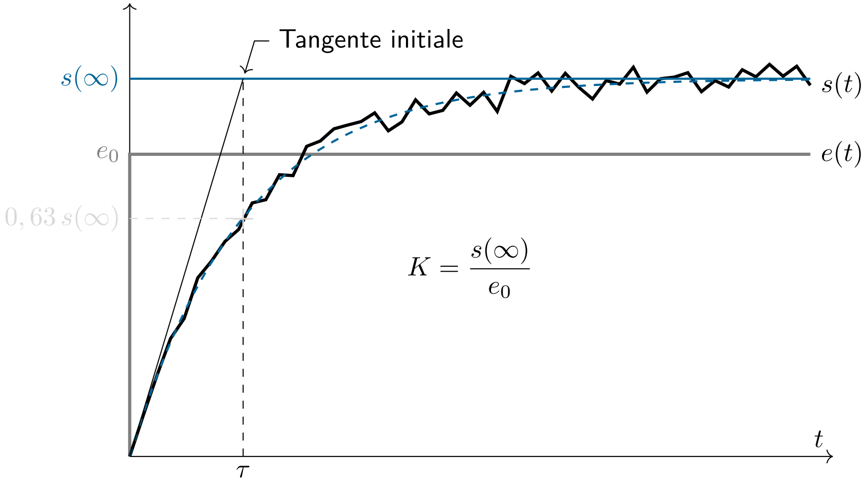
Identification d'un modèle du premier ordre



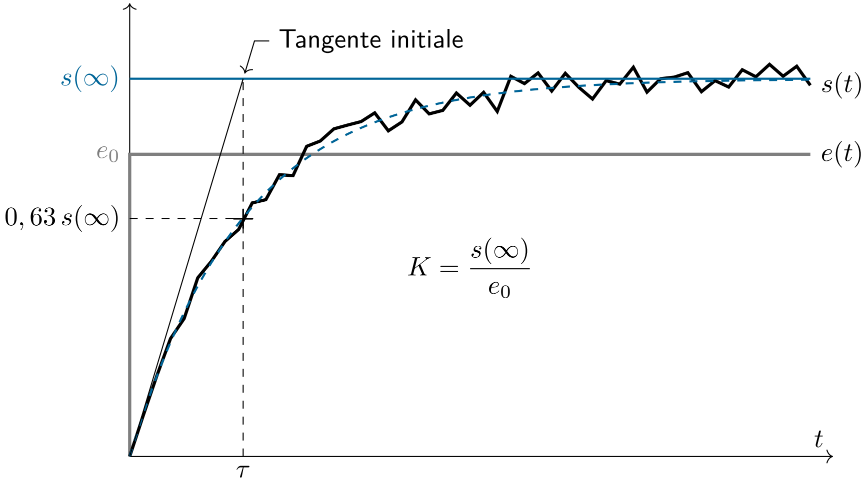
Identification d'un modèle du premier ordre



Identification d'un modèle du premier ordre

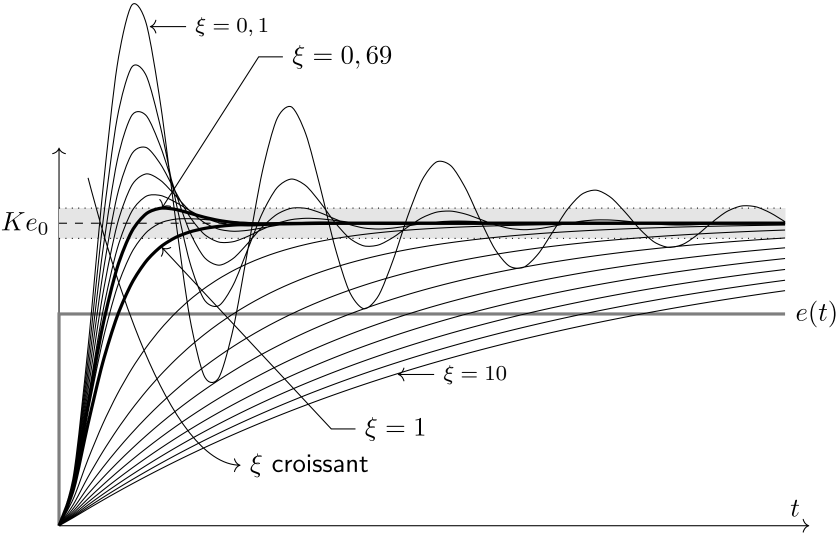


Identification d'un modèle du premier ordre

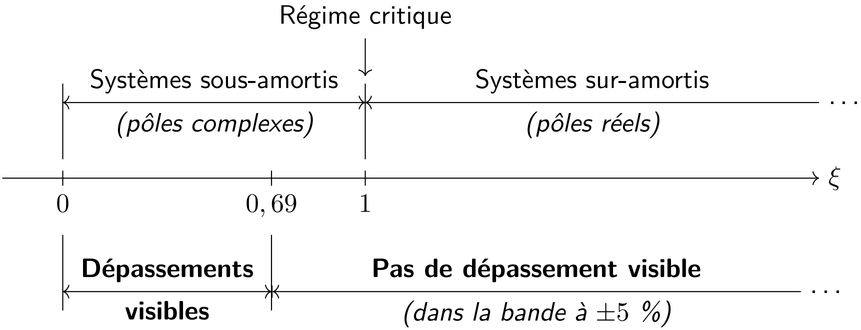


Identification d'un modèle du second ordre

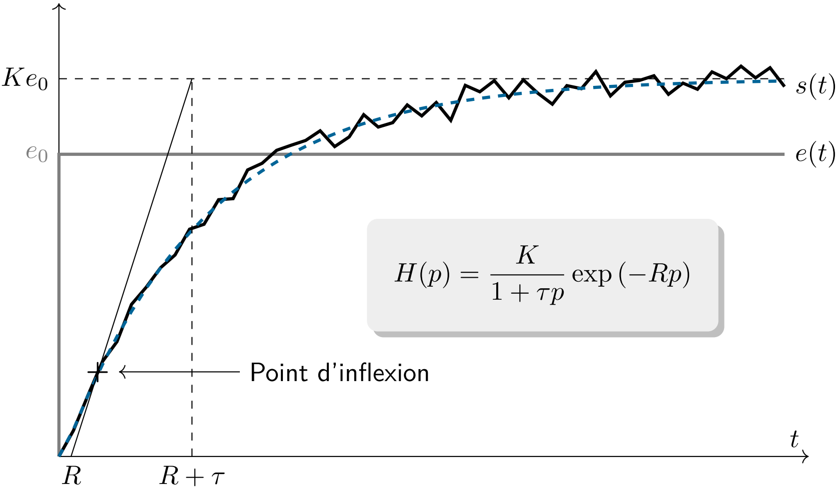
Influence du facteur d'amortissement



Différents régimes apparents

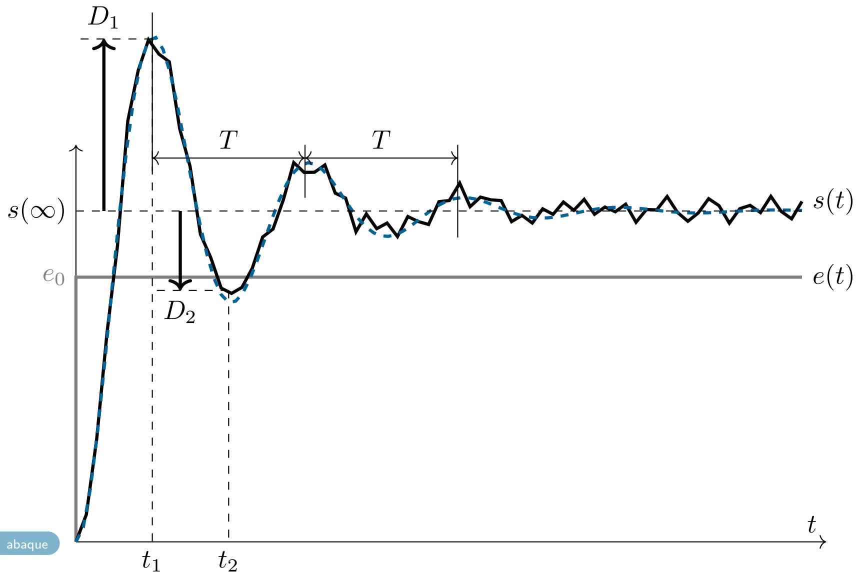


Identification d'un 2cd ordre sans dépassement



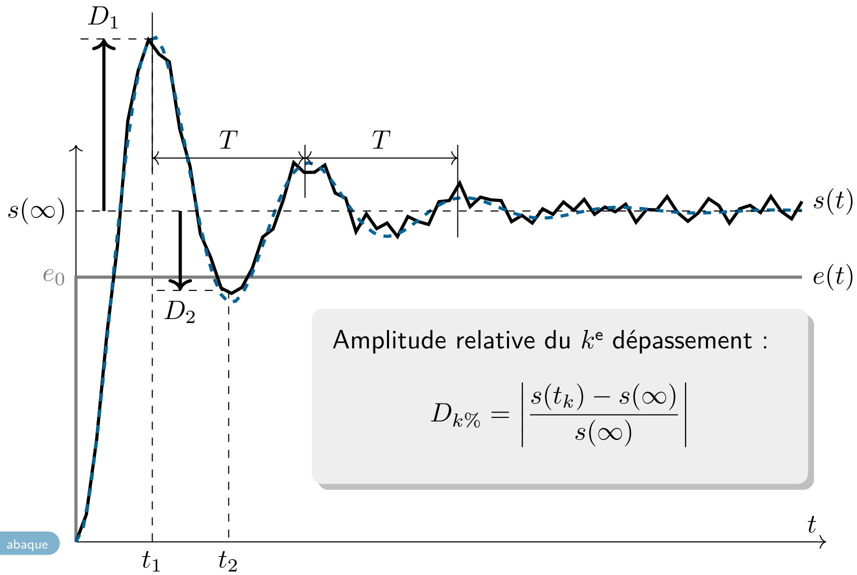
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p} \exp\left(-Rp\right)$$

Identification d'un 2^cd^ ordre avec dépassements



abaque

Identification d'un 2^{cd} ordre avec dépassements

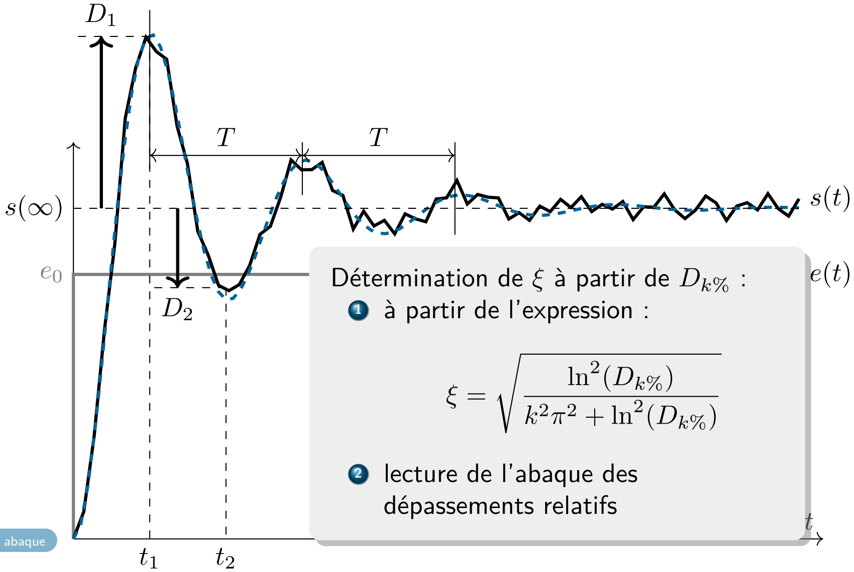


Amplitude relative du k^e dépassement :

$$D_{k\%} = \left| \frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)} \right|$$

abaque

Identification d'un 2^{cd} ordre avec dépassements



Détermination de ξ à partir de $D_{k\%}$:

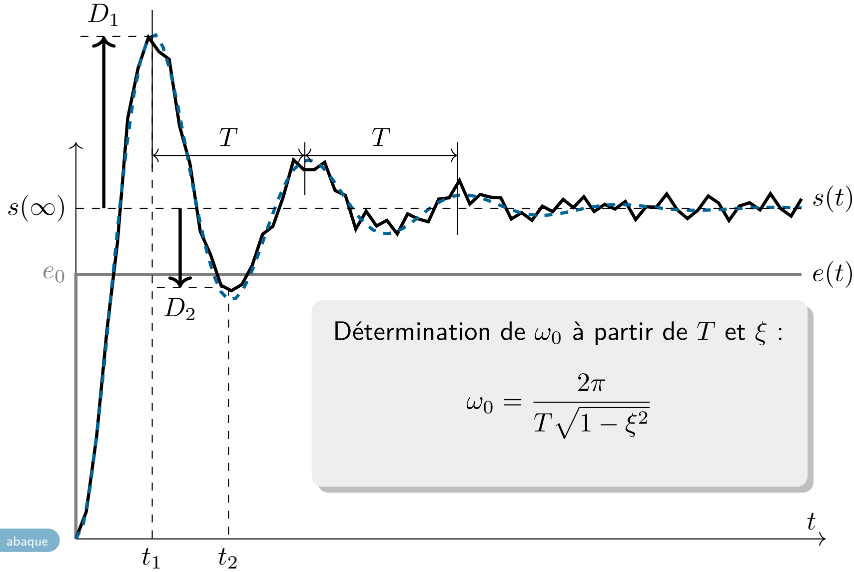
1. à partir de l'expression :

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2(D_{k\%})}{k^2\pi^2 + \ln^2(D_{k\%})}}$$

2. lecture de l'abaque des dépassements relatifs

abaque

Identification d'un 2^{cd} ordre avec dépassements

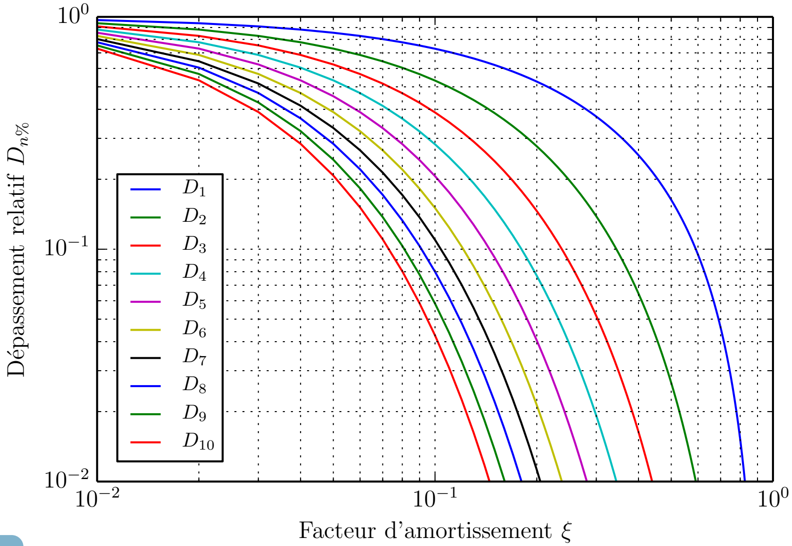


Détermination de ω_0 à partir de T et ξ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$

abaque

Abaque des dépassements relatifs

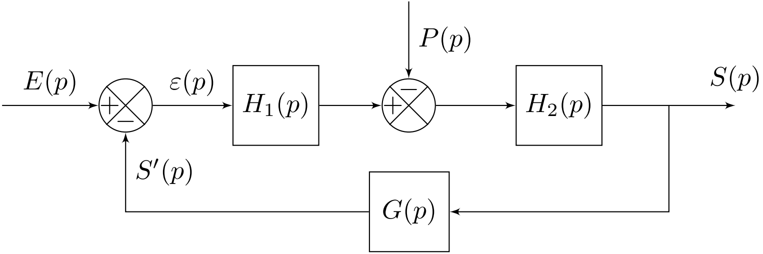


retour

1 2 3 4

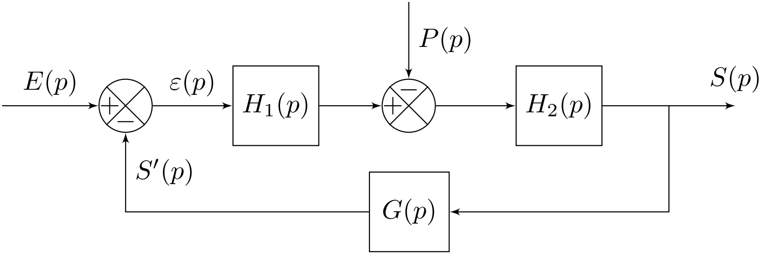
Performances des systèmes asservis

Structure générique d'un système asservi



$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)$$

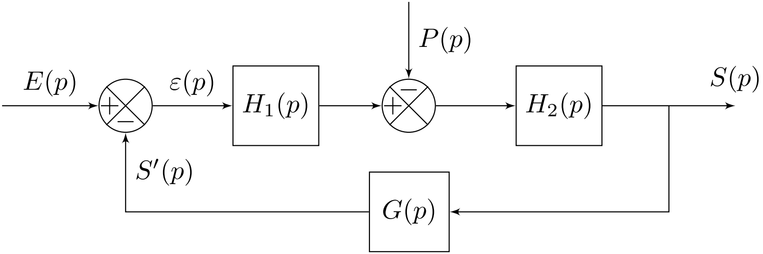
Structure générique d'un système asservi



$$S(p) = \left(\frac{H_1(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)} \right) E(p) - \left(\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)} \right) P(p)$$

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)$$

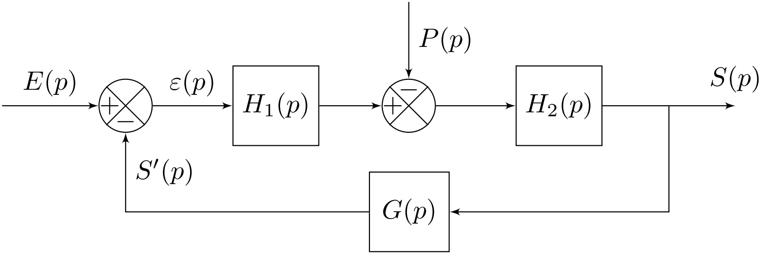
Structure générique d'un système asservi



$$S(p) = \left(\frac{H_1(p)\ H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)} \right) E(p) - \left(\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)} \right) P(p)$$

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)$$

Structure générique d'un système asservi



$$S(p) = \left(\frac{H_1(p)\ H_2(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)} \right) E(p) - \left(\frac{H_2(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)} \right) P(p)$$

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)\ H_2(p)\ G(p)$$

Étude des systèmes stables

Objectif d'un asservissement : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

Condition nécessaire : système stable.

Notion intuitive de stabilité

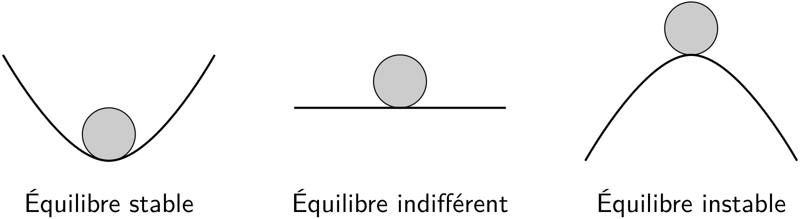
Équilibre stable — Équilibre indifférent — Équilibre instable

Étude des systèmes stables

Objectif d'un asservissement : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

Condition nécessaire : système stable.

Notion intuitive de stabilité



Stabilité d'un système (étude de la FTBF)

Définition (Stabilité)

Un système linéaire continu et invariant est stable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers une valeur finie et asymtpotiquement stable si cette valeur est nulle ; c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \text{cste} \qquad \text{(stable)}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0 \qquad \text{(asymptotiquement stable)}$$

Théorème (Système asymptotiquement stable)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Stabilité d'un système (étude de la FTBF)

Définition (Stabilité)

Un système linéaire continu et invariant est stable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers une valeur finie et asymtpotiquement stable si cette valeur est nulle ; c'est-à-dire :

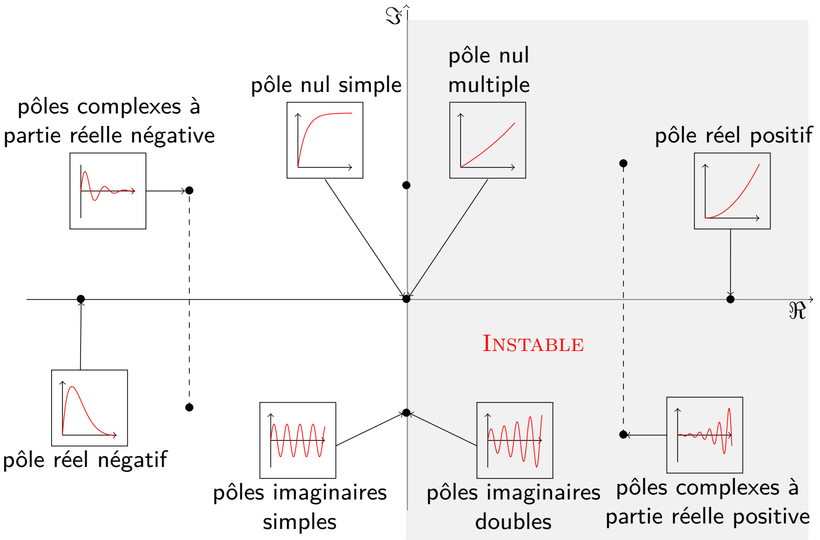
$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \text{cste} \qquad \text{(stable)}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0 \qquad \text{(asymptotiquement stable)}$$

Théorème (Système asymptotiquement stable)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Stabilité & position des pôles de la FTBF



Stabilité d'un système asservi (étude de la FTBO)

Mise en évidence du problème de stabilité

Expression de la sortie :

$$S(p) = \left(\frac{H_1(p)\,H_2(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)}\right)E(p) - \left(\frac{H_2(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)}\right)P(p)$$

Équation caractéristique :

$$1 + \mathsf{FTBO}(p) = 0$$

Étudier $\mathsf{FTBO}(p) = -1 \iff$ étudier le tracé de cette fonction dans le plan complexe par rapport au point $(-1, 0)$ appelé **point critique**.

Objectif du cours d'analyse harmonique

Stabilité d'un système asservi (étude de la FTBO)

Mise en évidence du problème de stabilité

Expression de la sortie :

$$S(p) = \left(\frac{H_1(p)\ H_2(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)}\right) E(p) - \left(\frac{H_2(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)}\right) P(p)$$

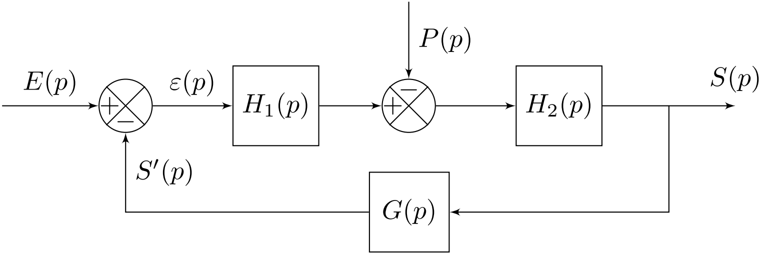
Équation caractéristique :

$$1 + \mathsf{FTBO}(p) = 0$$

Étudier $\mathsf{FTBO}(p) = -1 \iff$ étudier le tracé de cette fonction dans le plan complexe par rapport au point $(-1, 0)$ appelé **point critique**.

Objectif du cours d'analyse harmonique

Précision



- Expression de l'écart

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}\right) E(p) + \left(\frac{H_2(p)G(p)}{1+\text{FTBO}(p)}\right) P(p)$$

- 2 contributions
  - un écart de poursuite dû à la consigne E seule ;
  - un écart de régulation dû à la perturbation P seule.

Précision

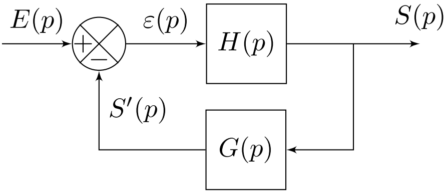
Définition (Écart statique)

L'écart statique correspond à la valeur finale de l'écart :

$$\varepsilon_{\mathsf{S}} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p)$$

Écart statique = écart en régime permanent

Influence de la consigne : écart de poursuite



FTBO

$$\text{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H(p)\,G(p)$$

Écart

$$\varepsilon(p) = E(p) - \text{FTBO}(p)\varepsilon(p) \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon(p) = \frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}\,E(p)$$

Influence de la consigne : écart statique

Définition (Écart statique)

L'écart statique correspond à la valeur finale de l'écart :

$$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+\mathsf{FTBO}(p)}\, E(p)$$

Comme toute FT, on peut mettre la FTBO sous la forme :

$$\mathsf{FTBO}(p) = \frac{K_{BO}}{p^\alpha} \times \frac{1 + a_1\, p + \cdots + a_m\, p^m}{1 + b_1\, p + \cdots + b_n\, p^n}$$

K_{BO} = gain FTBO & α = classe.

Écart statique

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+\dfrac{K_{BO}}{p^\alpha}}\, E(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha+1}}{K_{BO}+p^\alpha}\, E(p)$$

Influence de la consigne : écart statique

Définition (Écart statique)

L'écart statique correspond à la valeur finale de l'écart :

$$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+\mathsf{FTBO}(p)}\ E(p)$$

Comme toute FT, on peut mettre la FTBO sous la forme :

$$\mathsf{FTBO}(p) = \frac{K_{BO}}{p^\alpha} \times \frac{1 + a_1\,p + \cdots + a_m\,p^m}{1 + b_1\,p + \cdots + b_n\,p^n}$$

K_{BO} = gain FTBO & α = classe.

Écart statique

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+\dfrac{K_{BO}}{p^\alpha}}\ E(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha+1}}{K_{BO}+p^\alpha}\ E(p)$$

Influence de la consigne : écart statique vs entrée

En fonction de l'entrée, on parlera :

- Échelon $e(t) = e_0\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de position $\varepsilon_P = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^{\alpha}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$
- Rampe $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de traînage $\varepsilon_T = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$
- Parabole $e(t) = e_0 \dfrac{t^2}{2}\, u(t)$
  $\Rightarrow$ écart d'accélération ε_A

$$\varepsilon_A = \lim_{p \to 0} \frac{e_0\, p^{\alpha-2}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$$

Influence de la consigne : écart statique vs entrée

En fonction de l'entrée, on parlera :

- Échelon $e(t) = e_0\ u(t)$
  $\Rightarrow$ écart de position ε_P (aussi appelé écart indiciel ou écart statique)

$$\varepsilon_P = \lim_{p \to 0}\ \frac{e_0\ p^\alpha}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$$

$$\alpha = 0 \qquad \varepsilon_P = \frac{e_0}{K_{\text{BO}} + 1}$$

$$\alpha \geqslant 1 \qquad \varepsilon_P = 0$$

$\Rightarrow$ écart de position $\varepsilon_P = \lim\limits_{p \to 0}\ \dfrac{e_0\ p^\alpha}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$

- Rampe $e(t) = e_0\ t\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de traînage $\varepsilon_T = \lim\limits_{p \to 0}\ \dfrac{e_0\ p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$
- Parabole $e(t) = e_0\ \dfrac{t^2}{2}\ u(t)$
  $\Rightarrow$ écart d'accélération ε_A

$$\varepsilon_A = \lim\ \frac{e_0\ p^{\alpha-2}}{\ldots}$$

Influence de la consigne : écart statique vs entrée

En fonction de l'entrée, on parlera :

- Échelon $e(t) = e_0\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de position $\varepsilon_P = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^{\alpha}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$
- Rampe $e(t) = e_0\, t\, u(t)$
  $\Rightarrow$ écart de traînage ε_T (aussi appelé écart en vitesse)

$$\varepsilon_T = \lim_{p \to 0} \frac{e_0\, p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0 && \varepsilon_T = \infty \\
&\alpha = 1 && \varepsilon_T = \frac{e_0}{K_{\text{BO}}} \\
&\alpha \geqslant 2 && \varepsilon_T = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ écart de traînage $\varepsilon_T = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^{\alpha}}$

- Parabole $e(t) = e_0\, \dfrac{t^2}{2}\, u(t)$
  $\Rightarrow$ écart d'accélération ε_A

Influence de la consigne : écart statique vs entrée

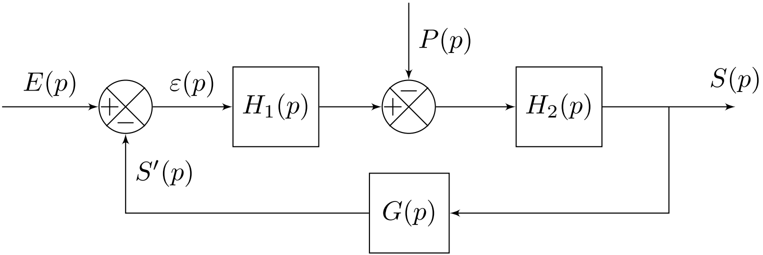
En fonction de l'entrée, on parlera :

- Échelon $e(t) = e_0\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de position $\varepsilon_P = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^\alpha}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$
- Rampe $e(t) = e_0\, t\, u(t)$ $\Rightarrow$ écart de traînage $\varepsilon_T = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{e_0\, p^{\alpha-1}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$
- Parabole $e(t) = e_0\, \dfrac{t^2}{2}\, u(t)$
  $\Rightarrow$ écart d'accélération ε_A

$$\varepsilon_A = \lim_{p \to 0} \frac{e_0\, p^{\alpha-2}}{K_{\text{BO}} + p^\alpha}$$

Influence de la consigne : écart statique vs entrée

Entrée		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$e_0\ u(t)$	ε_P	$\dfrac{e_0}{1+K_{\text{BO}}}$	0	0 (stable ?)	0 (stable ?)
$e_0\ t\, u(t)$	ε_T	∞	$\dfrac{e_0}{K_{\text{BO}}}$	0	0 (stable ?)
$e_0\ \dfrac{t^2}{2}\ u(t)$	ε_A	∞	∞	$\dfrac{e_0}{K_{\text{BO}}}$	0



- Expression de l'écart

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1+\mathsf{FTBO}(p)}\right) E(p) + \left(\frac{H_2(p)G(p)}{1+\mathsf{FTBO}(p)}\right) P(p)$$

- 2 contributions
  - un écart de poursuite dû à la consigne E seule ;
  - un écart de régulation dû à la perturbation P seule.

Influence d'une perturbation : écart de régulation

- Expression de l'écart

$$\varepsilon(p) = \frac{H_2(p)\ G(p)}{1 + \mathsf{FTBO}(p)}\ P(p)$$

- Pour une perturbation du type échelon

avec $P(p) = p_0\, u(p)$ et $G(p) = 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} \frac{H_2(p)}{1 + \mathsf{FTBO}(p)}\ p_0 = \lim_{p \to 0} \frac{p_0\, p^\alpha H_2(p)}{K_{\mathsf{BO}} + p^\alpha}$$

Définition (Système robuste)

Un système asservi est dit robuste s'il est insensible à l'effet d'une perturbation.

Influence d'une perturbation : écart de régulation

- Expression de l'écart

$$\varepsilon(p) = \frac{H_2(p)\,G(p)}{1 + \mathsf{FTBO}(p)}\;P(p)$$

- Pour une perturbation du type échelon

avec $P(p) = p_0\,u(p)$ et $G(p) = 1$:

$$\varepsilon_S = \lim_{p \to 0} \frac{H_2(p)}{1 + \mathsf{FTBO}(p)}\;p_0 = \lim_{p \to 0} \frac{p_0\,p^\alpha H_2(p)}{K_{\mathsf{BO}} + p^\alpha}$$

Définition (Système robuste)

Un système asservi est dit robuste s'il est insensible à l'effet d'une perturbation.

Influence d'une perturbation : écart de régulation

Proposition (Action intégrale en amont de la perturbation)

L'écart statique induit par une perturbation de type échelon appliquée à un système de classe 1 dont l'action intégrale est située en amont de la perturbation est nul.

Propriété (Action intégrale et robustesse)

Un système asservi est insensible à l'effet d'une perturbation de type échelon seulement s'il contient une action intégrale en amont de la perturbation.

Influence d'une perturbation : écart de régulation

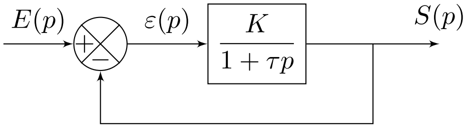
Proposition (Action intégrale en amont de la perturbation)

L'écart statique induit par une perturbation de type échelon appliquée à un système de classe 1 dont l'action intégrale est située en amont de la perturbation est nul.

Propriété (Action intégrale et robustesse)

Un système asservi est insensible à l'effet d'une perturbation de type échelon seulement s'il contient une action intégrale en amont de la perturbation.

Rapidité d'un système du 1^{er} ordre



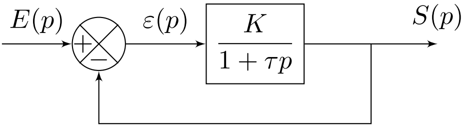
$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K}{1+\tau p}}{1+\dfrac{K}{1+\tau p}} = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{\tau}{1+K}p} = \frac{K'}{1+\tau' p}$$

avec, si $K > 0$:

$$K' = \frac{K}{1+K} < K \qquad \text{et} \qquad \tau' = \frac{\tau}{1+K} < \tau$$

Si $K = 1$, le système est deux fois plus rapide mais deux fois moins précis
$\Rightarrow$ nécessite un correcteur.

Rapidité d'un système du 1^er^ ordre

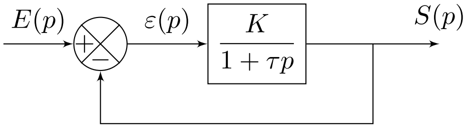


$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K}{1+\tau p}}{1+\dfrac{K}{1+\tau p}} = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{\tau}{1+K}p} = \frac{K'}{1+\tau' p}$$

avec, si $K > 0$:

$$K' = \frac{K}{1+K} < K \qquad \text{et} \qquad \tau' = \frac{\tau}{1+K} < \tau$$

Si $K = 1$, le système est deux fois plus rapide mais deux fois moins précis
$\Rightarrow$ nécessite un correcteur.



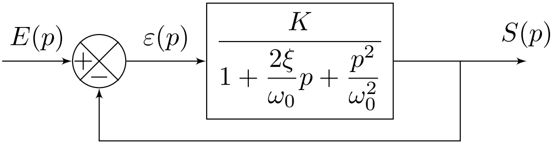
$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K}{1+\tau p}}{1+\dfrac{K}{1+\tau p}} = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{\tau}{1+K}p} = \frac{K'}{1+\tau' p}$$

avec, si $K > 0$:

$$K' = \frac{K}{1+K} < K \qquad \text{et} \qquad \tau' = \frac{\tau}{1+K} < \tau$$

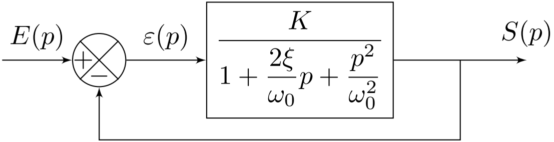
Si $K = 1$, le système est deux fois plus rapide mais deux fois moins précis
$\Rightarrow$ nécessite un correcteur.

Rapidité d'un système du 2^{cd} ordre



$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}}{1+\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0\left(1+K\right)}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2\left(1+K\right)}}$$

Rapidité d'un système du 2^{cd} ordre



$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0\,(1+K)}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2\,(1+K)}} = \frac{K'}{1+\dfrac{2\xi'}{\omega_0'}p+\dfrac{p^2}{(\omega_0')^2}}$$

avec, si $K>0$:

$$K' = \frac{K}{1+K} < K \ , \qquad \omega_0' = \omega_0\sqrt{1+K} > \omega_0 \qquad \text{et} \qquad \xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1+K}} < \xi$$