Applications

Exercice 1 (★). Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 2)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2, 0, 1)$ et $G = (-3, 1, 2)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F et G.
4. Déterminer les antécédents par g de A et B.
5. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
6. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Résultat attendu :

1. $f(A) = (-1, -1, -1)$, $f(B) = (3, -1, 1)$.
2. $g(F) = (3, 2)$, $g(G) = (0, -2)$.
3. F a pour antécédent $(1, 1)$. G n'a pas d'antécédent.
4. L'ensemble des antécédents de A est $\{(x, -x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
   L'ensemble des antécédents de B est $\{(x, 2-x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(2-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
5. f est injective, mais pas surjective. g est surjective mais pas injective.
6. $f \circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y+z, z, x+y+z) \end{array}$ et $g \circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x, 2x) \end{array}$

Exercice 2 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

1. $f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
2. $f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
3. $f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
4. $f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{-1, 1\} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,s) & \mapsto & s \times a \end{array}$
6. $f_6: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & \dfrac{a}{b} \end{array}$

Résultat attendu :

1. f_1 n'est pas bien définie.
2. f_2 est bien définie, injective et surjective.
3. f_3 est bien définie, injective, pas surjective.
4. f_4 est bien définie, injective, pas surjective.
5. f_5 est bien définie, pas injective, surjective.
6. f_6 est bien définie, pas injective, surjective.

Exercice 3 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1}.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ t & \mapsto & 1 + e^t \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ s & \mapsto & \dfrac{-1}{2}s - 1 \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ t & \mapsto & t + t^2 \end{array}$

Résultat attendu : On conjecture J par lecture graphique, puis on fixe x dans l'ensemble de définition, y dans J, et on résout $y = f(x)$ par équivalences.

1. $J =]1, +\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \ln(y-1)$.
2. $J = \mathbb{R}$, $f^{-1} : y \mapsto -2(y+1)$.
3. $J =]0, 1]$, $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$.
4. $J = [0, +\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}$.

Exercice 4 (★). Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$. La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{3}, \dfrac{x-2y}{3}\right) \end{array}$. Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences, en résolvant un système linéaire bien choisi.

Exercice 5 (★★). Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y}{1-|y|}$. Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences.

Exercice 6 ($\bigstar\bigstar$). On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1 \end{array}$.

Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ et pas $(\exp(x))^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Résultat attendu : $J = [2, +\infty[$. Les deux réciproques sont $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_- \\ y & \mapsto & -\sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$.
Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences, en introduisant une disjonction de cas quand elle devient nécessaire.

Exercice 7 ($\bigstar\bigstar$). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective sur $E \Longrightarrow a$ injective sur E.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.

Résultat attendu : On suppose que le membre de gauche de l'implication est vérifié, et on montre que le membre de droite est également vérifié en revenant à la définition d'injectif ou surjectif.

Exercice 8 (Type DS). On s'intéresse à l'application $h : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$.

1. La fonction h est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $h_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_1 est bijective et déterminer h_1^{-1}.
3. Soit $h_1 : \begin{array}{ccc} [-1,0] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_2 est bijective et déterminer h_2^{-1}.

Résultat attendu :

1. $h(1) = 1 - 1^2 = 0$ et $h(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$. Or $1 \neq -1$, donc h n'est pas injective.
   On suppose maintenant que 2 admet un antécédent par h. Alors $\exists x \in [-1, 1]$ tel que $2 = 1 - x^2$. Donc $x^2 = -1 < 0$: impossible. Donc 2 n'admet pas d'antécédent par h, donc h n'est pas surjective.
   Rmq : dans un cas comme dans l'autre, on aurait pu choisir d'autres valeurs pour les contre-exemples.
2. Soit $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$,
   $$y = h_1(x) \Longleftrightarrow y = 1 - x^2 \Longleftrightarrow x^2 = 1 - y \Longleftrightarrow x = \sqrt{1-y} \quad \text{car } 1 - y \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0.$$
   Donc h_1 est bijective et $\forall y \in [0, 1]$, $h_1^{-1}(y) = \sqrt{1-y}$.
3. Soit $x \in [-1, 0]$ et $y \in [0, 1]$,
   $$y = h_2(x) \Longleftrightarrow y = 1 - x^2 \Longleftrightarrow x^2 = 1 - y \Longleftrightarrow x = -\sqrt{1-y} \quad \text{car } 1 - y \geqslant 0 \text{ et } x \leqslant 0.$$
   Donc h_2 est bijective et $\forall y \in [0, 1]$, $h_2^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}$.