Applications

Cours de É. Bouchet – PCSI

9 octobre 2023

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définition, représentation

Définition 1.1 (Application, fonction, image, antécédent)

Soit E et F deux ensembles non vides. On dit que f est une **application** ou **fonction** définie de l'ensemble de départ E dans l'ensemble d'arrivée F lorsqu'elle associe à tout élément x de E un et un seul élément y de F.
Cet élément y unique, noté $f(x)$, est **l'image** de x par f. L'élément x est **un antécédent** de y par f.
On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Remarque. Écrit en quantificateurs, cela donne : $\forall x \in E$, $\exists ! y \in F$ tel que $y = f(x)$.

Exemple. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est une application de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.
L'image de 2 par f est 4. Les antécédents de 4 par f sont 2 et -2.

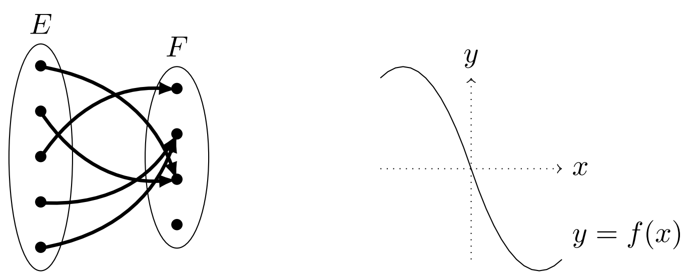
Remarque. Attention $f(x)$ représente seulement un élément de F (la valeur de la fonction f au point x). Si on veut parler de la fonction, il faut écrire f (sans x) ou $x \mapsto f(x)$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2+5 \end{array}$. Déterminer les antécédents de 6 par f.
Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6 \iff 3x^2+5 = 6 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les antécédents de 6 par f sont donc $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Remarque. On peut représenter une application f de deux manières différentes, sous forme de « patates » avec x d'un côté et $f(x)$ de l'autre, ou sous forme de graphe en positionnant les points $(x, f(x))$ dans le plan :



1.2 Image directe, image réciproque

Définition 1.2 (Image directe)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
- On appelle **image (directe) de** f l'ensemble $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$.
- Si $I \subset E$, on appelle **image (directe) de** I **par** f l'ensemble : $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$.

Remarque. $f(I)$ contient toutes les images par f des éléments de I.

Remarque. $f(E)$ ne doit pas être confondu avec l'espace d'arrivée F : $f(E) \subset F$, mais rien n'impose que les éléments de l'espace d'arrivée soient tous atteints par l'application.

Remarque. Passer par une représentation graphique de l'application peut aider à déterminer les images directes.

Exercice 2. Soit f la fonction définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. Déterminer $f(\mathbb{Z})$ et $f([\![3,6]\!])$ (aucune justification n'est demandée).
Solution : $f(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$ et $f([\![3,6]\!]) = \{6, 8, 10, 12\}$.

Exercice 3. Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Déterminer $g(\mathbb{R})$ et $g([-3,-1[)$ (aucune justification n'est demandée).
Solution : $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ et $g([-3,-1[) =]1,3]$.

Définition 1.3 (Image réciproque)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit $A \subset F$. On appelle **image réciproque de A par f** l'ensemble $f^{\text{rec}}(A) = \{x \in E | f(x) \in A\}$.

Remarque. La notation f^{rec} est provisoire, on la remplacera par f^{-1} en fin de chapitre, après avoir évacué toute ambiguïté possible.

Remarque. $f^{\text{rec}}(A)$ contient les antécédents par f des éléments de A. En particulier, si $a \in F$, $f^{\text{rec}}(\{a\})$ contient les antécédents de a par f.

Remarque. Soit $x \in E$, $x \in f^{\text{rec}}(A) \iff f(x) \in A$.

Remarque. Passer par une représentation graphique peut aider à déterminer les images réciproques.

Exercice 4. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{\text{rec}}([-2,-1])$, $f^{rec}(\mathbb{R}_-)$, $f^{\text{rec}}([1,4])$ (aucune justification n'est demandée).
Solution : $f^{\text{rec}}([-2,-1]) = \emptyset$, $f^{rec}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$, $f^{\text{rec}}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$.

1.3 Quelques cas particuliers

Définition 1.4 (Famille d'éléments d'un ensemble)

Soit E un ensemble et I un ensemble fini ou dénombrable. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E.
On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I.

Remarque. Plutôt que d'utiliser une notation de fonction, on utilise une notation de type $(x_i)_{i \in I}$ pour les familles d'éléments indexées par I.

Exemple. Une suite à valeurs réelles est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$, on note donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Définition 1.5 (Application identité)

Soit E un ensemble, on appelle **identité de E** l'application id_E définie de E dans E par :

$$\forall x \in E, \quad \text{id}_E(x) = x.$$

Définition 1.6 (Fonction indicatrice)

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de A** la fonction $\mathbb{1}_A$ définie de E dans $\{0,1\}$ par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

2 Opérations sur les applications

2.1 Restriction et prolongement

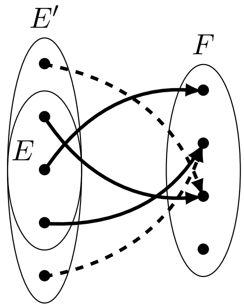
Définition 2.1 (Restriction, prolongement)

Soit E, E' et F des ensembles non vides tels que $E \subset E'$. Soit f une application de E dans F, et g une application de E' dans F.
On dit que f est **la restriction** de g à E, et que g est **un prolongement** de f à E', lorsque :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

Remarque. On note $g_{|E}$ la restriction de g à l'ensemble E.

Exemple. Représentation graphique des applications f et g :



Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, $g : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$.
Alors, g est la restriction de f à $[0, +\infty[$. f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$.
Un autre prolongement de g à $\mathbb{R}$ est : $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$, $h(x) = 0$ si $x < 0$.

2.2 Composée de deux applications

Définition 2.2 (Composée)

Soit D_f, A_f, D_g et A_g des ensembles non vides. Soit f une application définie de D_f dans A_f et g une application définie de D_g dans A_g. Si $A_f \subset D_g$, on appelle **composée** de f par g, notée $g \circ f$, l'application définie de D_f dans A_g par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Remarque. Attention, $g \circ f$ peut être défini sans que $f \circ g$ le soit. En effet, les conditions de bonne définition sont différentes : il faut $A_f \subset D_g$ pour définir $g \circ f$ et $A_g \subset D_f$ pour définir $f \circ g$.

Exemple. Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, donc $g \circ f$ est bien définie.
On a de plus $g \circ f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g \circ f(x) = (x^2)^3 = x^6$.

3 Injection, surjection, bijection

3.1 Injection

Définition 3.1 (Injection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **injection** de E dans F lorsque deux éléments de E distincts ont des images distinctes dans F :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x' \text{ (contraposée).}$$

Remarque. On peut aussi parler d'application injective.

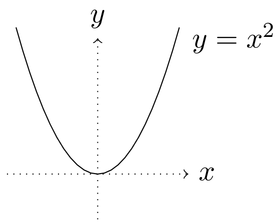
Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il faut donc montrer :

$$\exists (x, x') \in E^2 \text{ tels que } x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'),$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Remarque. Une fonction f est injective quand les éléments de l'espace d'arrivée ont au plus un antécédent.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$.



f n'est pas une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $f(-2) = 4 = f(2)$.
f est par contre une injection de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, on suppose que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 = y^2$, donc par passage à la racine $|x| = |y|$ et par positivité de x et y, $x = y$.

Exercice 5. $g : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ n & \mapsto 2n+2 \end{array}$ est-elle injective ?
Solution : Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $g(n_1) = g(n_2)$. Alors $2n_1 + 2 = 2n_2 + 2$, et donc $n_1 = n_2$. Donc g est injective.

Exercice 6. $h : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, x - z) \end{array}$ est-elle injective ?
Solution : h n'est pas injective car $h((2, -1, 2)) = (0, 0) = h((0, 0, 0))$.

Proposition 3.2 (Composée de deux injections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans G. Alors $g \circ f$ est une injection de E dans G.

Démonstration. Soit $(x, x') \in E^2$, on suppose que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, on en déduit $f(x) = f(x')$. Et puisque f est injective, on en déduit $x = x'$. Donc $g \circ f$ est injective de E dans G. □

Proposition 3.3 (Injection et stricte monotonie)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est une injection.

Démonstration. On montre le résultat dans le cas où f est strictement croissante, la preuve fonctionne de même dans le cas strictement décroissant. Soit x et x' deux éléments distincts de I.
— Si $x < x'$, la stricte croissance de f donne $f(x) < f(x')$.
— Si $x' < x$, la stricte croissance de f donne $f(x') < f(x)$.
Dans tous les cas, $f(x) \neq f(x')$. Deux éléments distincts ont des images par f distinctes, donc f est une injection. □

Exemple. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.2 Surjection

Définition 3.4 (Surjection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **surjection** de E dans F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application surjective.

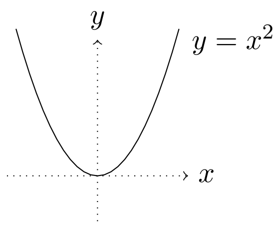
Remarque. La fonction f est une surjection si et seulement si $f(E) = F$. En particulier, toute application f définie sur un ensemble E est surjective de E dans $f(E)$.

Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il faut donc montrer :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) \neq y,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$.



f n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car -1 n'admet aucun antécédent par f.
f est par contre une surjection de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{y}$ est bien défini. On a alors $f(\sqrt{y}) = y$, et donc $\sqrt{y}$ est un antécédent de y.

Exercice 7. $g : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ n & \mapsto 2n+2 \end{array}$ est-elle surjective ?
<u>Solution :</u> Montrons que g n'atteint pas les termes impairs, et 1 en particulier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(n) = 1$. Alors $2n + 2 = 1$, donc $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$: absurde. Donc 1 n'a pas d'antécédent par g. Donc g n'est pas surjective.

Exercice 8. $h : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, x - z) \end{array}$ est-elle surjective ?
<u>Solution :</u> Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $h((\alpha, 0, \alpha - \beta)) = (\alpha + 2 \times 0, \alpha - (\alpha - \beta)) = (\alpha, \beta)$. Comme $(\alpha, 0, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3$, h est surjective.

Proposition 3.5 (Composée de deux surjections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une surjection de E dans F et g une surjection de F dans G. Alors $g \circ f$ est une surjection de E dans G.

Démonstration. Soit $y \in G$. Puisque g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.
Donc il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G. $\square$

3.3 Bijection

Définition 3.6 (Bijection)

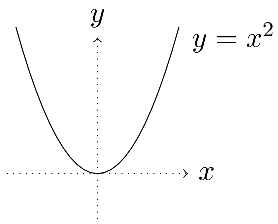
Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **bijection** de E dans F lorsque f est une surjection et une injection :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application bijective.

Remarque. Une fonction est donc bijective si tout élément de l'espace d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$.



f est alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
C'est aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. $g : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ n & \mapsto 2n+2 \end{array}$ est-elle bijective ?
<u>Solution :</u> g n'est pas surjective, donc pas bijective.

Exercice 10. $h : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+2y, x-z) \end{array}$ est-elle bijective ?
<u>Solution :</u> h n'est pas injective, donc pas bijective.

Définition 3.7 (Application réciproque)

Si f est une bijection de E dans F, on peut associer à tout $y \in F$ son antécédent unique $x \in E$. On définit ainsi **l'application réciproque** f^{-1} de f.

Remarque. Attention, la notation f^{-1} n'a rien à voir avec $\frac{1}{f}$. Pour éviter toute confusion, on évitera d'ailleurs d'utiliser des puissances négatives pour représenter des quotients de fonctions.

Proposition 3.8 (Lien entre f et f^{-1})

Soit $x \in E$, $y \in F$, f une application bijective de E dans F et f^{-1} l'application réciproque de f. Alors

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Démonstration. On montre séparément les deux implications.

— On suppose que $x = f^{-1}(y)$, alors x est un antécédent de y, donc $f(x) = y$.
— Réciproquement, on suppose que $f(x) = y$, donc x est un antécédent de y. Or f est bijective, donc y admet un unique antécédent, qui est donc x. Donc $x = f^{-1}(y)$.

□

Remarque. Cette constatation donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une application est bijective, sans avoir à montrer séparément qu'elle est injective et surjective.

Exercice 11. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} + 2$. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée, et déterminer son application réciproque.
Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]2, +\infty[$,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x-1} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{x-1} \Leftrightarrow \ln(y-2) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(y-2) + 1 = x,$$

où on pouvait bien composer par le logarithme puisque $y - 2 > 0$, sa stricte croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ justifiant la validité de l'équivalence.
Donc tout élément de $]2, +\infty[$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$, donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$, et $\forall y > 2$, $f^{-1}(y) = \ln(y-2) + 1$.

Proposition 3.9 (Composée de deux bijections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G. De plus,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. $g \circ f$ est injective comme composée d'injections et surjective comme composée de surjections, donc c'est bien une bijection de E dans G.
De plus, soit $y \in G$ et $x \in E$, l'utilisation successive des réciproques de g et f donne :

$$y = g \circ f(x) \Leftrightarrow y = g(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(y) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(y)) = x \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(y) = x.$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Proposition 3.10 (Bijectivité et image réciproque)

Soit E et F deux ensembles, f une bijection de E dans F et A un sous-ensemble de F. Alors

$$f^{-1}(A) = f^{\text{rec}}(A).$$

Remarque. Autrement dit, l'image directe de A par f^{-1} est égale à l'image réciproque de A par f. Cela justifie de renoncer à la notation f^{rec}, qui avait seulement été introduite à titre temporaire et que l'on n'utilisera plus jamais, pour utiliser f^{-1} à la place.

Démonstration. Soit $x \in E$,

$$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } x = f^{-1}(a) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } f(x) = a \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{\text{rec}}(A).$$

Donc $f^{-1}(A) \subset f^{\text{rec}}(A)$ et $f^{\text{rec}}(A) \subset f^{-1}(A)$. D'où l'égalité des ensembles par double inclusion. □

Remarque. Face à la notation $f^{-1}(A)$ dans un exercice, deux cas de figure possible :
- Soit f est bijective, et $f^{-1}(A)$ représente à la fois l'image directe de A par f^{-1} et l'image réciproque de A par f. Comme elles sont égales, il n'y a pas d'ambiguïté.
- Soit f n'est pas bijective, et $f^{-1}(A)$ représente l'image réciproque de A par f. Dans ce cas, attention : f^{-1} n'est en aucun cas la marque d'une application réciproque (puisque f n'est pas bijective).