Exercice 1 (★). Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^x}$	2. $f : x \mapsto (e^{3x} + 3x^2)^4$	3. $f : x \mapsto \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$	5. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x) - 1}$	6. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$
7. $f : x \mapsto (e^{3x} - x)^4$	8. $f : x \mapsto x \ln(x^2 - 3)$	9. $f : x \mapsto \frac{e^{x - \frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$
10. $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2} + 2}$	11. $f : x \mapsto \frac{(\ln(x))^4}{x}$	12. $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$
13. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	14. $f : x \mapsto \sin(x^2)$	15. $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$
16. $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$	17. $f : x \mapsto xe^{\cos(x)}$	

Exercice 2 (★). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer (en fonction de f') la dérivée des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble de dérivabilité) :

1. $u_1 : x \mapsto f(3 - 2x)$	2. $u_2 : x \mapsto f(e^x)$	3. $u_3 : x \mapsto (f(x))^2$
4. $u_4 : x \mapsto f(x^2)$	5. $u_5 : x \mapsto f(\sqrt{x})$	6. $u_6 : x \mapsto \frac{1}{f(\ln(x))}$
7. $u_7 : x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$	8. $u_8 : x \mapsto \sin(f(\sin(x)))$	9. $u_9 : x \mapsto f(e^{f(x)})$

Exercice 3 (★). Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n -ième de $f : t \mapsto e^{rt} + e^{-rt}$.

Exercice 4 (★). Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$.

Exercice 5 (★). On considère la fonction $f : \begin{matrix} [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x - 2)\sqrt{x - 1} \end{matrix}$.

- f est-elle dérivable en 1 ?
- Trouver la valeur $\beta \in \mathbb{R}$ la plus grande possible telle que $\forall x \geq 1, (x - 2)\sqrt{x - 1} \geq \beta$.

Exercice 6 (★★). Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$	2. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
3. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a + b}{2}\right)$	4. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \left \sqrt{a} - \sqrt{b}\right \leq \sqrt{ a - b }$

Exercice 7 (★). Déterminer la limite de :

1. $\frac{\arctan(t)}{t}$ quand $t \rightarrow 0$	2. $\frac{s}{e^s - 1}$ quand $s \rightarrow 0$	3. $\frac{\ln(1 + u)}{u}$ quand $u \rightarrow 0$
4. $\frac{1 - \cos(t)}{t}$ quand $t \rightarrow 0$	5. $\frac{3x}{\sin(x)}$ quand $x \rightarrow 0$	6. $\frac{\ln(1 + 2s^2)}{s}$ quand $s \rightarrow 0$
7. $\frac{e^{\sin(u)} - \cos(2u)}{u}$ quand $u \rightarrow 0$		

Exercice 8 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$	2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 9 (★★). Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^4)}{t}$
2. $\lim_{a \rightarrow 0} \tan(a)e^a$
3. $\lim_{r \rightarrow +\infty} (3r^2 - e^{2r} + 2)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}(3 + x^3)$
5. $\lim_{s \rightarrow 0^+} \sqrt{s}^{(s^2)}$
6. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{\cos^2(u)}$
7. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(t))}{\ln t}$
8. $\lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 e^y$
9. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sin(t)}{t}$
10. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-2t + (\ln(t))^3 + 2\sqrt{t})$
11. $\lim_{a \rightarrow 0^+} \tan^2(a) \ln(\sin(a))$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^4)}{x}$

Exercice 11 (★★). Étudier la fonction h définie par $h(x) = |x - 3| - \frac{2}{x - 1}$ sur un ensemble de définition à déterminer. Tracer sa courbe représentative en précisant les tangentes aux points remarquables.

Exercice 12 (★★). Soit $\lambda > 0$ et soit $f : t \mapsto e^{\lambda t}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Réécrire cette équation à l'aide de la fonction f .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. En remarquant que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que si x est solution de (E), alors $f(x) = x$.
4. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ , le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 13 (★). Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + 2i$
2. $z_2 = -\frac{3}{2} - i$

Exercice 14 (★★). Montrer que pour tout $s \in [-1, 1]$, $\arccos(s) + \arcsin(s) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 15 (★★). Montrer que si $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ vaut $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Exercice 16 (Type DS). On considère l'application $f : \begin{matrix}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = (x + \ln(x))e^{x-1} \end{matrix}$.

Partie A : étude de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) + \frac{1}{x} > 0$.
3. En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$, $x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f , comprenant les limites aux bornes. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
5. En utilisant les résultats précédents, tracer rapidement l'allure de la fonction f .

Partie B : étude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet qu'elle est bien définie.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
2. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e^n$.
Indication : pour l'hérédité, minorer chaque terme du produit.
3. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?