Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 1 (★). Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{1+e^x}$
2. $f : x \mapsto (e^{3x}+3x^2)^4$
3. $f : x \mapsto \left(\cos^2(x)+\frac{3}{2}\right)\sin(2x)$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)-1}$
6. $f : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big)$
7. $f : x \mapsto \left(e^{3x}-x\right)^4$
8. $f : x \mapsto x\ln(x^2-3)$
9. $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
10. $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2}+2}$
11. $f : x \mapsto \dfrac{\big(\ln(x)\big)^4}{x}$
12. $f : x \mapsto (x^3+x-2)^4$
13. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
14. $f : x \mapsto \sin(x^2)$
15. $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
16. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
17. $f : x \mapsto xe^{\cos(x)}$

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 12(e^{3x}+2x)(e^{3x}+3x^2)^3$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(2x)\left(2\cos^2(x)+3\right)-\sin^2(2x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{2(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$
5. $\forall x \in]e,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)-1}}$
6. $\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4(3e^{3x}-1)(e^{3x}-x)^3$
8. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus[-\sqrt{3},\sqrt{3}],\ f'(x) = \ln(x^2-3)+\dfrac{2x^2}{x^2-3}$
9. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\ f'(x) = \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}(x^2-\frac{1}{x^2}-2x)}{(x^2-1)^2}$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}$
11. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{4\big(\ln(x)\big)^3-\big(\ln(x)\big)^4}{x^2}$
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3$
13. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1],\ f'(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\dfrac{1}{(1+x)^2}$
14. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\cos(x^2)$
15. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus[-2,0],\ f'(x) = \dfrac{-2\cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)}{x(x+2)}$
16. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{1+2\sin(x)}{(\sqrt{\sin(x)+2})^3}$
17. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{\cos(x)}\left(1-x\sin(x)\right)$

Exercice 2 (★). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer (en fonction de f') la dérivée des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble de dérivabilité) :

1. $u_1 : x \mapsto f(3-2x)$
2. $u_2 : x \mapsto f(e^x)$
3. $u_3 : x \mapsto \big(f(x)\big)^2$
4. $u_4 : x \mapsto f(x^2)$
5. $u_5 : x \mapsto f(\sqrt{x})$
6. $u_6 : x \mapsto \dfrac{1}{f(\ln(x))}$
7. $u_7 : x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $u_8 : x \mapsto \sin(f(\sin(x)))$
9. $u_9 : x \mapsto f(e^{f(x)})$

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_1'(x) = -2f'(3-2x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_2'(x) = e^x f'(e^x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_3'(x) = 2f'(x)f(x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_4'(x) = 2xf'(x^2)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_5'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_6'(x) = -\dfrac{f'(\ln(x))}{x(f(\ln(x)))^2}$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u_7'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_8'(x) = \cos(x)f'(\sin(x))\cos\left(f(\sin(x))\right)$
9. $\forall x \in \mathbb{R},\ u_9'(x) = f'(x)e^{f(x)}f'\left(e^{f(x)}\right)$

Exercice 3 (★). Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n-ième de $f : t \mapsto e^{rt}+e^{-rt}$.
Résultat attendu : On montre par récurrence que $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = r^n e^{rt}+(-r)^n e^{-rt}$.

Exercice 4 (★). Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
Résultat attendu : On se ramène à l'étude de la fonction $f : x \mapsto x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en cherchant à montrer qu'elle est négative.

Exercice 5 (★)**.** On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)\sqrt{x-1} \end{array}$.

1. f est-elle dérivable en 1 ?
2. Trouver la valeur $\beta \in \mathbb{R}$ la plus grande possible telle que $\forall x \geqslant 1,\ (x-2)\sqrt{x-1} \geqslant \beta$.

Résultat attendu :

1. Une étude de taux d'accroissement montre que f n'est pas dérivable en 1.
2. On trouve par étude de fonction que $\beta = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 6 (★★)**.** Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$
2. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$
3. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

Résultat attendu : Dans chacun des cas, on raisonne par équivalences jusqu'à se ramener à une inégalité qu'on sait être toujours vraie. Des disjonctions de cas peuvent aussi être nécessaires.

Exercice 7 (★)**.** Déterminer la limite de :

1. $\dfrac{\arctan(t)}{t}$ quand $t \to 0$
2. $\dfrac{s}{e^s-1}$ quand $s \to 0$
3. $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ quand $u \to 0$
4. $\dfrac{1-\cos(t)}{t}$ quand $t \to 0$
5. $\dfrac{3x}{\sin(x)}$ quand $x \to 0$
6. $\dfrac{\ln(1+2s^2)}{s}$ quand $s \to 0$
7. $\dfrac{e^{\sin(u)}-\cos(2u)}{u}$ quand $u \to 0$

Résultat attendu : Les calculs se font à l'aide de taux d'accroissements.

1. 1
2. 1
3. 1
4. 0
5. 3
6. 0
7. 1

Exercice 8 (★)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Résultat attendu : On revient à la définition des puissances non entières.

1. $x = 0$ ou $x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$
2. $x = 1$ ou $x = 4$

Exercice 9 (★★)**.** Montrer que pour tout $x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Résultat attendu : On se ramène à l'étude des variations d'une fonction bien choisie.

Exercice 10 (★)**.** Calculer les limites suivantes :

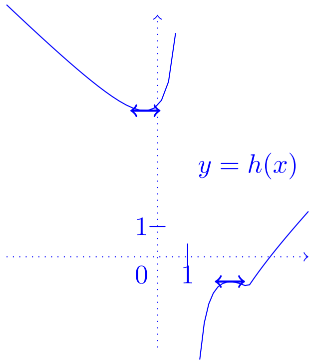
1. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t^4)}{t}$
2. $\lim\limits_{a\to 0} \tan(a)e^a$
3. $\lim\limits_{r\to+\infty} (3r^2 - e^{2r} + 2)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}(3+x^3)$
5. $\lim\limits_{s\to 0^+} \sqrt{s}^{(s^2)}$
6. $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u^3}{\cos^2(u)}$
7. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(t))}{\ln t}$
8. $\lim\limits_{y\to-\infty} y^2e^y$
9. $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}$
10. $\lim\limits_{t\to+\infty} (-2t + (\ln(t))^3 + 2\sqrt{t})$
11. $\lim\limits_{a\to 0^+} \tan^2(a)\ln(\sin(a))$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^4)}{x}$

Résultat attendu : Les calculs se font par calcul direct, croissances comparées, composition ou encadrement.

1. 0
2. 0
3. $-\infty$
4. 0
5. 1
6. 0
7. 0
8. 0
9. 0
10. $-\infty$
11. 0
12. 0

Exercice 11 (★★)**.** Étudier la fonction h définie par $h(x) = |x-3| - \dfrac{2}{x-1}$ sur un ensemble de définition à déterminer. Tracer sa courbe représentative en précisant les tangentes aux points remarquables.
Résultat attendu : L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. L'étude fournit le tableau de variations et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2} \,\|\|\, \frac{3}{2}$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 12 (★★)**.** Soit $\lambda > 0$ et soit $f : t \mapsto e^{\lambda t}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Réécrire cette équation à l'aide de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. En remarquant que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que si x est solution de (E), alors $f(x) = x$.
4. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation (E).

Résultat attendu :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $(E) \iff f \circ f(x) = x$.
2. On utilise la relation $f \circ f(x) = f(x) = x$.
3. La stricte croissance s'obtient par étude de la dérivée. La réciproque se montre ensuite par l'absurde.
4. Une étude de fonction donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-\ln(\lambda)}{\lambda}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln(\lambda)}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On rencontre trois cas de figure : si $\lambda > e^{-1}$, (E) n'a aucune solution ; si $\lambda = e^{-1}$, (E) a une unique solution ; si $\lambda < e^{-1}$, (E) a exactement deux solutions.

Exercice 13 (★)**.** Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + 2i$
2. $z_2 = -\dfrac{3}{2} - i$

Résultat attendu :

1. $z_1 = \sqrt{5}e^{i\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ ou $z_1 = \sqrt{5}e^{i\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.
2. $z_2 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}e^{-i\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)}$ ou $z_2 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}e^{i\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right)}$.

Exercice 14 (★★)**.** Montrer que pour tout $s \in [-1, 1]$, $\arccos(s) + \arcsin(s) = \dfrac{\pi}{2}$.
Résultat attendu : On se ramène à l'étude d'une fonction bien choisie.

Exercice 15 (★★)**.** Montrer que si $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$ vaut $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$
Résultat attendu : On se ramène à l'étude d'une fonction bien choisie.

Exercice 16 (Type DS)**.** On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=(x+\ln(x))\,e^{x-1} \end{array}$.

Partie A : étude de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ln(x)+\frac{1}{x}>0$.
3. En déduire que $\forall x\in]0;+\infty[,\ x+\ln(x)+1+\frac{1}{x}>0$.
4. Dresser le tableau de variation de f, comprenant les limites aux bornes. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
5. En utilisant les résultats précédents, tracer rapidement l'allure de la fonction f.

Partie B : étude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. On admet qu'elle est bien définie.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 2$.
2. En déduire par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant e^n$.
   Indication : pour l'hérédité, minorer chaque terme du produit.
3. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

<u>Résultat attendu :</u> Partie A

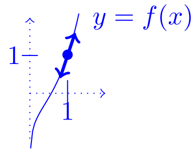
1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur des fonctions dérivables ($x\to\ln(x)$ et $x\to e^{x-1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$). De plus, $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}+(x+\ln(x))\,e^{x-1}=e^{x-1}\left(1+x+\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$.
2. $\forall x\in]0,+\infty[$, on pose $g(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. Comme $g(1)=1$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)\geqslant g(1)=1>0$, c'est à dire $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(x)+\frac{1}{x}>0$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, $x+1>0$, donc par somme d'inégalités avec le résultat obtenu en 2., $x+\ln(x)+1+\frac{1}{x}>0$.
4. Comme $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ e^{x-1}>0$, 1. et 3. donnent $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)>0$. f est donc (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit de limites, $\lim\limits_{n\to 0}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=+\infty$, d'où le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   On trouve par ailleurs $f(1)=1$ et $f'(1)=3$.
5. Les questions précédentes donnent l'allure suivante :



Partie B

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n)$:« $u_n\geqslant 2$ ».
   $u_0=2\geqslant 2$ donc $P(0)$ est vraie.
   Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. $u_n\geqslant 2>0$, donc par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf A.4.), $f(u_n)\geqslant f(2)$. Or $f(2)=(2+\ln(2))e\geqslant 2$ (car $e\geqslant 1$ et $\ln(2)\geqslant 0$) donc $u_{n+1}\geqslant 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 2$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n)$:« $u_n\geqslant e^n$ ».
   $u_0=2\geqslant 1=e^0$, donc $P(0)$ est vraie.
   Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie : $u_n\geqslant e^n$. Par B.1., $u_n\geqslant 2$ donc $\ln(u_n)\geqslant 0$ et $u_n+\ln(u_n)\geqslant e^n$. Puis par produit avec $e^{u_n-1}\geqslant 0$: $f(u_n)\geqslant e^n e^{u_n-1}$. Or $u_n\geqslant 2$, donc $e^{u_n-1}\geqslant e$ et $f(u_n)\geqslant e^{n+1}$. Donc $u_{n+1}\geqslant e^{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant e^n$.
   Rmq : pour l'hérédité, on pouvait écrire $f(u_n)\geqslant f(e^n)$, mais minorer par e^{n+1} pose problème si $n=0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}e^n=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.