

Exercice 1 (★). Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite éventuelle) des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ | 2. $b_n = ((-1)^n + n^3) e^{-n}$ | 3. $c_n = ((-1)^n + e^{-n}) n^3$ |
| 4. $d_n = (\cos(n) + 3) \ln(n)$ | 5. $e_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$ | 6. $f_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n-2}$ |
| 7. $g_n = \frac{(\ln(n))^2 - 2}{\ln(n) + n}$ | 8. $h_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n) - 3n}{n+3}$ | 9. $i_n = \frac{(-1)^n + 2n}{n^2}$ |
| 10. $j_n = n^2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$ | 11. $k_n = n^2 \left(\frac{11}{10} + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$ | 12. $\ell_n = n \left(2 + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) - \sqrt{n}$ |

Résultat attendu :

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. Converge vers 0 | 2. Converge vers 0 | 3. Diverge |
| 4. Diverge vers $+\infty$ | 5. Converge vers 0 | 6. Diverge vers $+\infty$ |
| 7. Converge vers 0 | 8. Converge vers -3 | 9. Converge vers 0 |
| 10. Diverge | 11. Diverge vers $+\infty$ | 12. Diverge vers $+\infty$ |

Exercice 2 (★). Démontrer que la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left((-1)^n - \frac{3}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$ est bornée.

Résultat attendu : On étudie $(|u_n|)$ pour éviter les problèmes de signe, puis un calcul direct donne une minoration par -4 et une majoration par 4 .

Exercice 3 (★★). Démontrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n^2+1}{n^2+2} + 3e^{-n} - 10 \sin(n)$ est bornée.

Résultat attendu : Un calcul direct donne une minoration par -10 et une majoration par 14 . On peut aussi utiliser les propriétés des suites convergentes, qui donnent l'existence d'un majorant sans fournir sa valeur.

Exercice 4 (★). Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $v_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1 - v_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résultat attendu : La suite v est décroissante, convergente et converge vers 0 .

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3 + k^3}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

Résultat attendu : On montre par théorème d'encadrement que v converge vers 0 .

Exercice 6 (★). Démontrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(\frac{\pi k^2}{7}) + 2}{2^k}$ est convergente.

Résultat attendu : On montre que u est croissante et majorée, donc convergente.

Exercice 7 (★★). Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout n entier non nul par : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que pour tout n non nul, $u_{2n} - \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Résultat attendu :

1. La suite est décroissante et minorée, donc converge.
2. On simplifie l'expression puis majore la somme obtenue.
3. On complète l'inégalité de la question précédente pour obtenir un encadrement de $u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$, puis on passe à la limite dans cet encadrement. La suite u converge vers 0 .

Exercice 8 (★★★). On définit les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $b_0 > a_0 > 0$ et les relations suivantes, vérifiées pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers un même réel ℓ .

Résultat attendu : On montre séparément la convergence des deux suites, puis on passe à la limite dans la deuxième relation de récurrence.

Exercice 9 (★★). Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les trois suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite u converge.

Résultat attendu : On utilise la limite de $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que celles de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont égales. On conclut ensuite par propriété de cours.

Exercice 10 (★★). Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Résultat attendu : On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite. La convergence de u en découle.

Exercice 11 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n .

Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

Exercice 12 (★★). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n .

Résultat attendu : Si $\lambda \neq 1$, $u_n = \lambda^n \left(2 - \frac{3}{1-\lambda} \right) + \frac{3}{1-\lambda}$. Si $\lambda = 1$, $u_n = 2 + 3n$.

Exercice 13 (★). Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
3. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n$, $v_0 = 1$ et $v_1 = -1$.

Résultat attendu : Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 2^n - 1, \quad u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-3n + 1), \quad v_n = \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Exercice 14 (★★). Dans chacune des situations suivantes, déterminer la limite de la suite étudiée.

1. u est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{3}$.
2. v est une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq \frac{3}{4}v_n$.
3. w est une suite telle que $\forall n \geq 3$, $|w_{n+1} - \sqrt{5}| \leq (e-2)|w_n - \sqrt{5}|$.

Résultat attendu : u diverge vers $+\infty$, v converge vers 0, w converge vers $\sqrt{5}$.

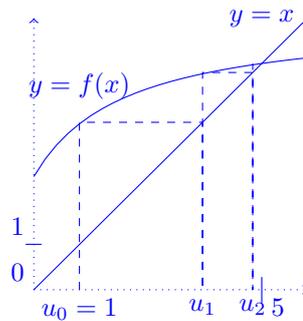
Pour le montrer, il faut exploiter les relations de récurrence fournies, de manière à établir des inégalités reliant le n -ième terme de la suite et son premier terme. On exploite ensuite ces inégalités avec un théorème d'encadrement ou de comparaison.

Exercice 15 (★). Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}$.

1. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{6x + 5}{x + 2}$. En déduire que la suite est bien définie, et tracer la représentation des réels u_0 , u_1 et u_2 .
2. Étudier la monotonie et les bornes éventuelles de la suite u .
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Résultat attendu :

1. L'étude de f montre que \mathbb{R}_+ est stable par f , donc la suite u est bien définie.



2. La suite u est croissante et majorée (par 5 ou 6 suivant le choix de raisonnement).
3. La convergence est donnée par la question précédente, puis le calcul se fait par théorème du point fixe. La suite u converge vers 5.

Exercice 16 (★★★). Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite u définie par le premier terme $u_0 \geq 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Résultat attendu : Si $u_0 \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, la suite u est croissante et majorée. Sinon, elle est décroissante et minorée. Dans les deux cas, elle converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 17 (Type DS). On définit la suite de terme général a_n par : $\forall n \geq 1, a_n = \frac{\sqrt{n} \binom{2n}{n}}{4^n}$.

1. Calculer a_1 puis, pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

Indication : on pourra commencer par simplifier $\frac{n+1}{2n+3} - \frac{2n+1}{4n+4}$ pour en étudier le signe.

3. Déterminer le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Résultat attendu :

1. $a_1 = \frac{\sqrt{1} \binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De plus soit $n \geq 1, a_n \neq 0$, donc on peut diviser :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+1} 4^n \binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1} \sqrt{n} \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2n+1}{n+1} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 1, \frac{n+1}{2n+3} - \frac{2n+1}{4n+4} = \frac{4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 - 8n - 3}{(2n+3)(4n+4)} = \frac{1}{(2n+3)(4n+4)} \geq 0$.

On montre alors par récurrence sur \mathbb{N}^* la propriété $P(n)$: « $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ ».

— $a_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2+1}}$ donc $P(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors comme $a_n \neq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \stackrel{P(n)}{\leq} \frac{a_{n+1}}{a_n} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \stackrel{1.}{=} \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{4n+4}}.$$

Or le calcul précédant la récurrence donne $\frac{n+1}{2n+3} \geq \frac{2n+1}{4n+4}$. Donc par croissance de $x \rightarrow \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+ ,

$a_{n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} = \sqrt{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat demandé : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{1.}{=} \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{(2n+1)^2}}{\sqrt{4n(n+1)}} = \sqrt{\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 4n}} \geq \sqrt{1} = 1$, où on a conclu par croissance de la racine sur \mathbb{R}_+ . Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $\frac{1}{n} \geq 0$. Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Étant croissante et majorée, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ .

La croissance et la majoration donnent de plus : $\forall n \geq 1, \frac{1}{2} = a_1 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. En passant à la limite dans cette inégalité, on trouve $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.