

# Calcul vectoriel

N. Mesnier

Lycée Jean Perrin, Lyon

2023–2024

# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Opérations vectorielles
- 3 Applications

1

2

3

# Introduction

## Les vecteurs

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.



modèles et calculs  
en mécanique

## Les vecteurs

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.



modèles et calculs  
en mécanique

## Définition (Vecteur)

Un vecteur est un objet mathématique, noté  $\vec{u}$  par exemple pour le « vecteur  $u$  », qui appartient un espace vectoriel et qui possède trois caractéristiques :

- une direction ;
- un sens ;
- une norme.

## • Notations

- $\mathcal{E}$  : ensemble des points de l'espace géométrique 3D ;
- $\mathcal{V}$  : ensemble des vecteurs de l'espace ;
- $(\vec{u}, \vec{v})$  une mesure de l'angle orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$  ;
- $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$  une mesure de l'angle opposé.

## ● Addition vectorielle

Pour former la somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , il suffit de considérer trois points  $A, B, C$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ . Le vecteur somme est alors donné par la relation de Chasles :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

L'addition vectorielle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est associative :  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- elle est commutative :  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- elle possède un élément neutre, noté  $\vec{0}$ , tel que :  
 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- chaque vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$  possède un vecteur symétrique  $\vec{v}$  vérifiant  
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  et noté  $-\vec{u}$ .

## ● Produit d'un vecteur et d'un réel

À tout nombre réel  $\lambda$  et à tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$ , on peut associer le vecteur  $\lambda \vec{u}$ .  
Ce produit externe vérifie les propriétés suivantes :

- il possède un élément neutre :  $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition des réels :  
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{u} \in \mathcal{V}, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

## ● Espace vectoriel

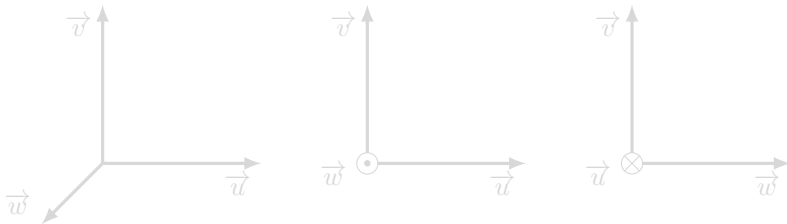
On dira, pour résumer les propriétés de l'addition vectorielle et du produit externe, que le triplet  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .



# Base d'un espace vectoriel

## Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de vecteurs non coplanaires.



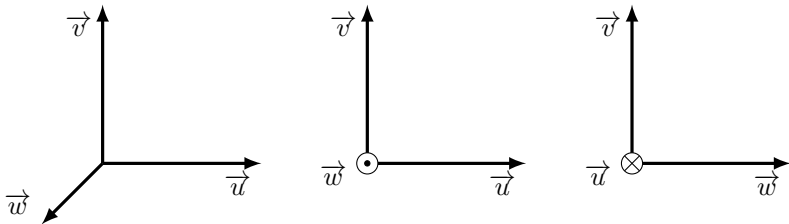
Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une **base directe**, alors les triplets  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$  et  $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ , obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets  $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ ,  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$  et  $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ , où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

# Base d'un espace vectoriel

## Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de vecteurs non coplanaires.



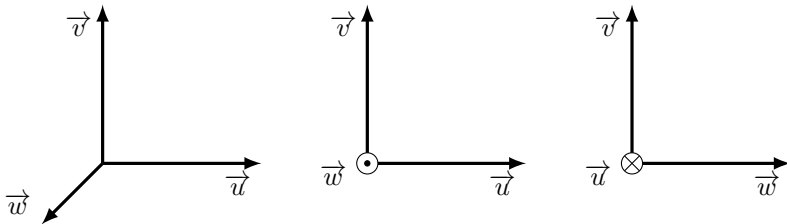
Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une **base directe**, alors les triplets  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$  et  $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ , obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets  $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ ,  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$  et  $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ , où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

# Base d'un espace vectoriel

## Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de vecteurs non coplanaires.



Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une **base directe**, alors les triplets  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$  et  $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ , obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets  $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ ,  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$  et  $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ , où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.



# Opérations vectorielles

# Produit scalaire

## Définition (Produit scalaire)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, & \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 ; \\ \text{sinon,} & \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$$

# Produit scalaire

## Propriété

Le produit scalaire est une application de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

- bilinéaire :

$$(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})$$

- symétrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- définie positive :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

## Définition (Norme)

On appelle norme d'un vecteur  $\vec{v}$  le réel

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0$$

# Produit scalaire

## Proposition (Perpendicularité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, on a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

# Produit scalaire

## Proposition (Perpendicularité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, on a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !



# Produit vectoriel

## Définition (Produit vectoriel)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ;
- sinon, l'unique vecteur  $\vec{w}$  orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ , de norme :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

et tel que le trièdre  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit direct (une base directe de l'espace).

# Produit vectoriel

## Propriété

Le produit vectoriel est une application de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

- bilinéaire :

$$(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + \mu (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$$

- antisymétrique :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

## Proposition

Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe, alors

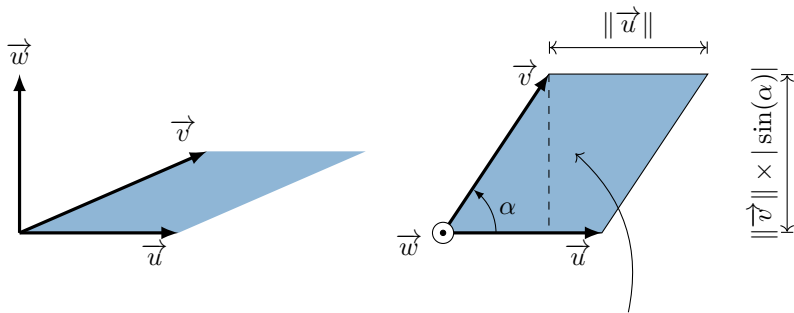
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{w}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{u}$$

$$\vec{w} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{w}) = \vec{v}$$

# Produit vectoriel

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan  $\mathcal{P}$ , alors le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  et de norme la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .



$$\text{Aire} = \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

# Produit vectoriel

## Proposition (Colinéarité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, on a :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

# Produit vectoriel

## Proposition (Colinéarité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, on a :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

# Produit vectoriel

## Proposition (Double produit vectoriel)

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

# Produit mixte

## Définition (Produit mixte)

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte (ou déterminant) du triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  le réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

## Propriété

Le produit mixte est une application de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

- trilinéaire :

$$[(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2)] \cdot \vec{w} = \lambda \alpha (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) \cdot \vec{w} + \lambda \beta (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{w} \\ + \mu \alpha (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1) \cdot \vec{w} + \mu \beta (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{w}$$

- antisymétrique :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

- alternée :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$



# Produit mixte

## Proposition (Coplanéité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  non nuls, on a :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

## Proposition

*Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe, alors*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$

# Produit mixte

## Proposition (Coplanéité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  non nuls, on a :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité!

## Proposition

*Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe, alors*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$

# Produit mixte

## Proposition (Coplanéité)

*Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  non nuls, on a :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité!

## Proposition

*Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe, alors*

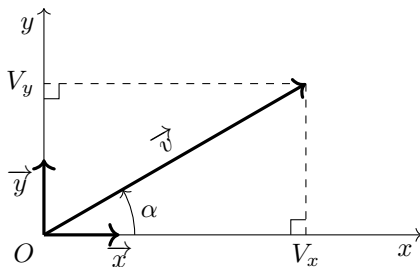
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$



# Applications

# Projection d'un vecteur

Soit une base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  orthonormée et  $\vec{v}$  un vecteur orienté d'un angle  $\alpha = (\vec{x}, \vec{v})$  par rapport à l'horizontale.



Coordonnées du vecteur  $\vec{v}$  :

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{x} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} \times \underbrace{\cos(\vec{v}, \vec{x})}_{-\alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{y} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=1} \times \underbrace{\cos(\vec{v}, \vec{y})}_{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\vec{v}\| \times \sin(\alpha)$$

# Projection d'un vecteur

Ainsi, tout vecteur  $\vec{v}$  peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{v} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{v} \cdot \vec{z}) \vec{z} \\ &= v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z}\end{aligned}$$

Du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur  $\vec{v}$ , notée  $\|\vec{v}\|$ , est la grandeur toujours positive :

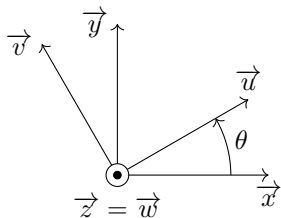
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

# Changement de base

## Définition (Figure géométrale)

On appelle figure géométrale une figure plane permettant de relier deux bases orthonormées possédant une direction commune. L'orientation des vecteurs d'une base par rapport à l'autre est définie par un angle que l'on représentera toujours positif et inférieur à  $\pi/4$ .

Projections nécessaires au passage de  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  vers  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  :



$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

# Changement de base

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(\theta) \quad \vec{u} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{x} = -\sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(\theta)$$

- Exemple

$$\vec{V} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  s'écrira

$$\begin{aligned}\vec{V} &= (\vec{V} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{V} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{V} \cdot \vec{z}) \vec{z} \\ &= (a \cos(\theta) - b \sin(\theta)) \vec{x} + (a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) \vec{y} + c \vec{z}\end{aligned}$$

dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de  $\vec{V}$ , sa norme sera toujours identique :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



# Distance d'un point à une droite

Soit  $\mathcal{D}$  une droite passant par le point  $A$  et dirigée par le vecteur non nul  $\vec{u}$ .

Alors :

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

## Proposition (Distance point-droite)

*Soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  une droite passant par le point  $A$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}$ . La distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  est définie par :*

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

# Distance d'un point à un plan

Soit  $\mathcal{P}$  un plan contenant le point  $A$   
et de normale définie par le vecteur non nul  $\vec{n}$ .

Alors :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

## Proposition (Distance point-plan)

*Soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  un plan contenant le point  $A$  et de normale  $\vec{n}$ . La distance du point  $M$  au plan  $\mathcal{P}$  est définie par :*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

# Décomposition orthogonale d'un vecteur

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de normale  $\vec{n} \neq \vec{0}$ .

En exploitant la formule du double produit vectoriel selon

$$(\vec{u} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{u}$$

il vient que l'on peut décomposer tout vecteur non nul  $\vec{u}$  selon :

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{n}\|^2} [(\vec{n} \cdot \vec{u}) \vec{n} + (\vec{n} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}]$$

en un vecteur colinéaire à la normale  $\vec{n}$  et en un vecteur parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

Une « nouvelle » version du théorème de Pythagore !

$$\left( \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 + \left( \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)^2 = 1$$



N. Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon