Calcul de primitives

Exercice 1 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^{1}(2t^2-3)dt$
2. $\int_{-1}^{x}(2s+1)^4 ds$
3. $\int_0^x \frac{dt}{(2t+1)^4}$
4. $\int_x^2 \sqrt{u+1}du$
5. $\int_{2x}^{x^2} 2s(s^2+1)^3 ds$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\sin^5(2t)dt$
7. $\int_1^{1+2x} \frac{\ln(u)}{u}du$

Exercice 2 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-x}^{x}\sin(3t)dt$
2. $\int_{x^2}^{1}\cos\left(\frac{s-1}{2}\right)ds$
3. $\int_0^x \cos^2(t)dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{5}}\sin^2(5u)du$
5. $\int_{-x^2}^{2x^2} e^{3t}dt$
6. $\int_0^1 e^{(2i-5)t}dt$
7. $\int_1^x se^{2s^2}ds$

Exercice 3 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_3^x \frac{1}{t+2}dt$
2. $\int_{-5}^x \frac{1}{t+2}dt$
3. $\int_{-1}^x \frac{1}{3-2s}ds$
4. $\int_{-1}^1 \frac{2u+1}{1+u+u^2}du$
5. $\int_0^{3x}\tan(t)dt$
6. $\int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}}dt$
7. $\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{e^s\sqrt{2e^{-s}+1}}ds$

Exercice 4 (★). Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t}$
2. $f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^t$
3. $f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^t$

Exercice 5 (★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \frac{2t}{1+t^4}$
2. $f_2 : t \mapsto \frac{e^{2t}}{1+e^t}$
3. $f_3 : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$
4. $f_4 : t \mapsto \frac{\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}$

Exercice 6 (★). En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto t\sin(t)$
2. $f_2 : t \mapsto t\ln(t)$
3. $f_3 : t \mapsto t^2e^{-t}$
4. $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
5. $f_5 : t \mapsto t\arctan(t)$
6. $f_6 : t \mapsto t\sin(t)\cos(2t)$

Exercice 7 (★★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $g_1 : t \mapsto \frac{e^t-1}{e^t+1}$
2. $g_2 : t \mapsto \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
3. $g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$

Indication : pour g_2, poser $t = \sin(s)$.

Exercice 8 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{2t+1}$
2. $g : t \mapsto \frac{2t}{2t+1}$
3. $h : t \mapsto \frac{3t+1}{2t+1}$
4. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^2-2t-3}$
5. $\psi : t \mapsto \frac{1}{2t^2-3t-2}$
6. $\mu : t \mapsto \frac{1}{4t^2+4t+1}$
7. $u : t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+5}$
8. $v : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$.

Exercice 9 (★★). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

1. $\int_0^{\pi}(1-pt)\sin(pt)dt$
2. $\int_{-1}^x (t+x)^p dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^{2s}}{e^s+1}ds$
4. $\int_{-x}^x \frac{ds}{\sqrt{1-as}}$
5. $\int_0^{e^p}\ln(1+r^2)dr$
6. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t\ln(t)}$
7. $\int_{-a}^{2a} t\sqrt{p-t^2}dt$
8. $\int_1^x \frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}}du$
9. $\int_0^{x^2}\frac{ds}{s^2-p^2}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)e^{a\sin(t)}dt$

Exercice 10 (★★). On pose, pour tout $x > 0$, $G(x) = \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$. Justifier que G est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer l'expression de sa dérivée, et ses variations.
Indication : inutile de calculer une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

Exercice 11 (★). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est impaire sur $[-a, a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(x)dx$? Prouvez-le.
2. Même question si f est paire.
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$? Prouvez-le.

Exercice 12 (Type DS)**.** Pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, justifier l'existence de $I(p,q)$. Calculer $I(0,0)$, $I(1,0)$ et $I(1,1)$.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = I(q,p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $I(p,0)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$.
5. Déduire des deux questions précédentes la valeur pour $p \in \mathbb{N}$ de $I(p,1)$, puis celle de $I(p,2)$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
7. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{2q+1}(\theta) d\theta$.
   Indication : poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.