Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 (★). On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices ? Les calculer.

Résultat attendu : $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 9 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 8 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 9 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Les autres produits sont impossibles.

Exercice 2 (★). Soient S et T les matrices : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer S^2, T^2, ST, TS.

Résultat attendu : $S^2 = I_3$, $T^2 = I_3$, $ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $TS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (★). Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de deux façons différentes.
Laquelle est la plus judicieuse ?

Résultat attendu : On trouve $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (plus judicieuse).

Exercice 4 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss les systèmes d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1. $\begin{cases} (2-a)x + y + az = 0 \\ y - az = 2 \\ az = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} (2-a)x + y + az = 0 \\ y - az = 2 \\ az = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

Résultat attendu :

1. Si $a = 0$ ou $a = 2$, il n'y a pas de solution. Sinon, l'unique solution est $x = \dfrac{4}{a-2}$, $y = 3$ et $z = \dfrac{1}{a}$.
2. Si $a = 0$, l'ensemble solution est $\{(-1, 2, t) | t \in \mathbb{R}\}$. Si $a = 2$, il n'y a pas de solution. Sinon, l'unique solution est $x = \dfrac{2}{a-2}$, $y = 2$ et $z = 0$.
3. L'unique solution est $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.
4. L'ensemble solution peut s'écrire $\left\{ \left(\dfrac{1-\lambda}{7}, \dfrac{3+11\lambda}{7}, \lambda \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ou $\left\{ \left(\dfrac{2-\alpha}{11}, \alpha, \dfrac{7\alpha-3}{11} \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ou $\{(t, 2-11t, 1-7t) | t \in \mathbb{R}\}$.
5. L'unique solution est $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$.

Exercice 5 (★★). Résoudre, en discutant selon les valeurs du réel m, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ 2x + y + 2mz & = 1 \\ 2x - 2y + 3z & = -1 \end{cases} .$$

Résultat attendu : Si $m = \dfrac{3}{4}$, il n'y a pas de solution.
Sinon, l'unique solution est $x = \dfrac{-4m-4}{4m-3}$, $y = \dfrac{-2m+5}{4m-3}$ et $z = \dfrac{7}{4m-3}$.

Exercice 6 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Résultat attendu : $A^0 = I_3$ et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1}A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (★★). Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0_3$ et $A^3 = 0_3$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice I_3.
3. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur de B^n.

Résultat attendu :

1. On trouve par calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.
2. On trouve $B = A + 3I_3$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton donne :

$$B^n = \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & n3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ -n3^n - n(n-1)3^{n-2} & 3^n - n3^{n-1} - n(n-1)3^{n-2} & n3^{n-1} - n(n-1)3^{n-2} \\ n3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & 3^n - n3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (★★). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et de I_n (autrement dit, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_n$). Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que A^p est également une combinaison linéaire de A et I_n.
Résultat attendu : On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (★). Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible.
Résultat attendu : On a $A(B - I_n) = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = B - I_n$.

Exercice 10 (★). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A - 5I_n$. Montrer que A est inversible.
Résultat attendu : On a $\dfrac{A(2I_n - A)}{5} = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{2I_n - A}{5}$.

Exercice 11 (★). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
Résultat attendu : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I_3$.
Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{5I_3 - A}{4} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (★★). Soit $n \geqslant 2$, on pose $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse en fonction de J_n et I_n.
Résultat attendu : $A^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$. Donc $A\dfrac{(A - (n-2)I_n)}{n-1} = I_n$.
Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{A - (n-2)I_n}{(n-1)} = \dfrac{1}{n-1}J_n - I_n$.

Exercice 13 (★). Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
Résultat attendu : Elles sont inversibles, avec $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (★★). Étudier l'inversibilité et déterminer l'inverse éventuel de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Résultat attendu : Seules A et C sont inversibles, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 15 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de m la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Résoudre, en discutant selon les valeurs de m, le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$(S) \begin{cases} mx + y + z + t & = 0 \\ x + my + z + t & = 0 \\ x + y + mz + t & = 0 \\ x + y + z + mt & = 0 \end{cases}.$$

Résultat attendu :

1. M est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -3$.
2. — Si $m \neq 1$ et $m \neq -3$, l'unique solution est $(0, 0, 0, 0)$.
   — Si $m = 1$, l'ensemble solution peut s'écrire $\{(\lambda, \lambda, \lambda, -3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\lambda, \lambda, -3\lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\lambda, -3\lambda, \lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(-3\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   — Si $m = -3$, l'ensemble solution est $\{(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 16 (★★). Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & 1 & t \\ -2t & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $G = \{M(t) | t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que le produit de deux matrices de G est une matrice de G, que les matrices de G sont inversibles et que l'inverse d'une matrice de G est encore une matrice de G.
Résultat attendu : Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $M(t_1)M(t_2) = M(t_1 + t_2)$, d'où la stabilité par produit.
De plus, $I_3 = M(0)$, donc si $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible d'inverse $M(-t)$.

Exercice 17 (★★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie quelques propriétés des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Déterminer $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que A peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ est-il une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$?

Résultat attendu :

1. On montre par double inclusion que $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \{0_n\}$
2. On montre par analyse-synthèse que la décomposition est unique et vaut $A = \dfrac{A + A^\top}{2} + \dfrac{A - A^\top}{2}$.
3. Non. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A et B sont symétriques, mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 18 (Type DS)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$, et $E = \{M(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, le produit $M(a)M(b)$ est dans E.
2. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse lorsqu'il existe.
3. Déterminer le réel a_0 non nul tel que : $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.
4. On considère les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_3 - P$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
   (b) Exprimer P^2, QP, PQ, Q^2 en fonction de P et Q.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(M(a))^n$ en fonction de a.

Résultat attendu :

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a & b-3ab+a \\ b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a \\ b-3ab+a & b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab \end{pmatrix} = M(a+b-3ab).$$

   Or $M(a+b-3ab) \in E$. D'où le résultat.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Par 1., si on trouve $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(a+b-3ab) = I_3$, alors on saura que $M(a)$ est inversible, d'inverse $M(b)$. Or, $M(a+b-3ab) = I_3 \Leftrightarrow a+b-3ab = 0 \Leftrightarrow b(3a-1) = a$. Donc :
   — Si $a \neq \frac{1}{3}$, alors $M(a)$ est inversible et $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$.
   — $M\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (à montrer par pivot de Gauss).

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. D'après 1., $M(a)^2 = M(2a - 3a^2)$. D'où

$$M(a)^2 = M(a) \Leftrightarrow M(2a-3a^2) = M(a) \Leftrightarrow 2a - 3a^2 = a,$$

   par identification des coefficients des deux matrices. Or

$$2a - 3a^2 = a \Leftrightarrow a - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a(1-3a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3},$$

   puisque $a \neq 0$. Donc $a_0 = \frac{1}{3}$ est l'unique réel non nul vérifiant $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$.

4. (a) On utilise le a_0 trouvé en 3. Par identification des coefficients des matrices,

$$\begin{aligned} M(a) = P + \alpha Q &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a &= \frac{1+2\alpha}{3} \\ a &= \frac{1-\alpha}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 - 3a. \end{aligned}$$

   (b) Par 3., $P^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = P$, puis $QP = (I-P)P = P - P^2 = P - P = 0$ et de même $PQ = 0$. Enfin $Q^2 = (I-P)^2 = I - P - P + P^2 = I - P = Q$.

   (c) Comme $PQ = QP$ par 4b., on peut utiliser le binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(M(a))^n = (P + \alpha Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \alpha^{n-k} Q^{n-k}.$$

   4b. donne également par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P^k = P$ et $Q^k = Q$. D'où : $\forall n \geqslant 2$,

$$(M(a))^n = \binom{n}{0} P^0 \alpha^n Q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} PQ + \binom{n}{n} P \alpha^0 Q^0 = \alpha^n Q + 0 + P = \alpha^n Q + P.$$

   Pour $n = 1$ on a bien aussi $M(a) = P + \alpha Q$. Donc en remplaçant avec le α de 4a., $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(M(a))^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n \\ 1-(1-3a)^n & 1+2(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n \\ 1-(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n & 1+2(1-3a)^n \end{pmatrix}.$$