Exercices PCSI
É.Bouchet

Limites et continuité

Exercice 1 (★). Calculer les limites (lorsqu'elles existent) en $x \to 0$ et en $x \to +\infty$ de :

1. $u_1(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$ 2. $u_2(x) = \sin(x)e^{-x}$ 3. $u_3(x) = x^3 \cos(x)$ 4. $u_4(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

Exercice 2 (★★). Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+|x|}{2x^2-|x|}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-16}{x^3-8}$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$ 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$

Exercice 3 (★★). À l'aide de changements de variables et des formules de composition déterminer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \frac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2}$ 2. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$

Exercice 4 (★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1+\ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 5 (★★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in]-1,4[,\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est impair} \\ x & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est pair} \end{cases}$ 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\lfloor x \rfloor$

Exercice 6 (★). Soit u et v deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} u(0)=0 \\ v(0)=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(1)=1 \\ v(1)=0 \end{cases}$.
Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $u(x) = v(x)$.

Exercice 7 (★★). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8 (★★★). Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[$.
Montrer que g admet un point fixe.

Exercice 9 (★). Montrer (sans étude de fonction) que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\ln(t)}{1+t^2} \end{array}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 (★★). Montrer (sans étude de fonction) que $g : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\sin(t-1)}{t-1} + \dfrac{t^2\cos(t)}{e^t} \end{array}$ est bornée sur $]1,+\infty[$.

Exercice 11 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 (★). Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13 (★). Le but de l'exercice est d'étudier pour tout $n \geqslant 2$ les solutions de l'équation $e^x = x+n$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque $n \to +\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ (ensemble de définition, tableau de variation, limites, allure du graphe).
2. On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente que l'équation $e^x = x+n$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, solutions que l'on note x_n et y_n (avec $x_n < y_n$).
3. (★★) Déterminer la limite des suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$.
4. (★★) Démontrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ sont monotones.

Exercice 14 (Type DS)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux uniques réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.

2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3. Étude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.

   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 3}$ converge.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 0$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

   Indication : passer à la limite dans une égalité bien choisie.