Limites et continuité

Cours de É. Bouchet – PCSI

14 décembre 2023

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Elle sont toutes supposées à valeurs réelles (sauf dans la dernière section).

1 Notion de voisinage

Définition 1.1 (Voisinage d'un point)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un **voisinage** de a est un intervalle ouvert centré en a.
On dit qu'une propriété portant sur une fonction f est **vraie au voisinage de** a lorsqu'elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a.

Remarque. Un voisinage de a est donc un intervalle de type $]a-\eta, a+\eta[$, avec $\eta > 0$.

Définition 1.2 (Voisinage de l'infini)

Un **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un intervalle du type $]B, +\infty[$ (resp. $]-\infty, B[$), où $B \in \mathbb{R}$.
On dit qu'une propriété portant sur une fonction f est **vraie au voisinage de** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple. La fonction logarithme est positive sur $]1, +\infty[$, donc elle est positive au voisinage de $+\infty$. Elle est négative sur $]0, 1[=]-1, 1[\cap \mathbb{R}_+^*$, donc elle est négative au voisinage de 0.

2 Limite d'une fonction en un point

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Limite finie/infinie de f en a)

Soit a un réel appartenant à I ou une extrémité de I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :

— f **admet** ℓ **comme limite au point** a si pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de a. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

— f **admet** $+\infty$ **comme limite au point** a si pour tout $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant M$ au voisinage de a. C'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I, f(x) \geqslant M.$$

Remarque. Tant qu'on choisit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, le choix de $[a-\eta, a+\eta]$ ou $]a-\eta, a+\eta[$ n'a pas d'importance pour la définition, tout comme le choix d'inégalités strictes ou larges pour f.

Définition 2.2 (Limite finie/infinie de f en $+\infty$)

On suppose que I admet $+\infty$ comme extrémité. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :

— f **admet** ℓ **comme limite en** $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de $+\infty$. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I \text{ tel que } \forall x \geqslant A, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

— f **admet** $+\infty$ **comme limite en** $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant M$ au voisinage de $+\infty$. C'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in I \text{ tel que } \forall x \geqslant A, f(x) \geqslant M.$$

Remarque. Ces définitions s'adaptent facilement au cas $-\infty$ en remplaçant $f(x) \geqslant M$ par $f(x) \leqslant M$, ou $x \geqslant A$ par $x \leqslant A$.

Remarque. En reformulant en terme de voisinage, si α et β sont des réel ou $\pm\infty$, f admet comme limite β en α si pour tout voisinage V_β de β, il existe un voisinage V_α de α tel que $\forall x \in V_\alpha \cap I$, $f(x) \in V_\beta$.

Remarque. Si α et β sont des réels ou $\pm\infty$, on note $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} \beta$ ou $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ pour indiquer que f admet β comme limite en α.

Proposition 2.3 (Unicité de la limite)

Soit α un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ existe, alors cette limite est unique.

Démonstration. Le principe de la démonstration est le même que dans le cas des limites de suites, en adaptant le raisonnement suivant la valeur de α. □

Proposition 2.4 (Limite en un point de l'ensemble de définition)

Soit a un réel. Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. On note ℓ la limite réelle de f en a (le cas $\ell = \pm\infty$ se traite de même) et on suppose que $\ell \neq f(a)$.
Soit $\varepsilon = \frac{|f(a)-\ell|}{2} > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. En particulier, puisque $a \in I$,

$$|f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon = \frac{|f(a) - \ell|}{2}.$$

En divisant par $|f(a) - \ell| > 0$, on trouve $1 \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. D'où le résultat. □

Proposition 2.5 (Limite en un point et bornes au voisinage)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et f une fonction définie au voisinage de α. Si la fonction f admet une limite finie en α, alors f est bornée au voisinage de α.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$, les autres cas se traitent de la même façon.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite finie de f en α. On pose $\varepsilon = 1 > 0$. Alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$, c'est-à-dire $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$.
Donc f est bornée au voisinage de α (par $\ell - 1$ et $\ell + 1$). □

Définition 2.6 (Limite à droite, limite à gauche)

Soit a un point de I ou une de ses extrémités, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
- f admet ℓ comme **limite à droite** en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+\eta] \cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- f admet ℓ comme **limite à gauche** en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a[\cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque. On note $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ pour la limite à droite, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ pour la limite à gauche.

Remarque. Il n'est pas nécessaire que f soit définie en a pour définir $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

Proposition 2.7 (Lien entre limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite ℓ en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$. Si $a \in I$, il faut de plus ajouter la condition $\ell = f(a)$.

Démonstration. Immédiat en revenant aux définitions. □

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. La fonction admet une limite à droite en 0, qui vaut 1, et une limite à gauche en 0, qui vaut 0. Elle n'admet par contre pas de limite en 0.

2.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 2.8 (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction)

Soit α et ℓ des réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \text{ Pour toute suite réelle } u \text{ à valeurs dans } I \text{ et telle que } \lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n)=\ell.$$

Démonstration. On montre successivement les deux implications.

- On suppose que $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$. Soit u une suite réelle à valeurs dans I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.
  On fixe V_ℓ un voisinage de ℓ, c'est-à-dire un intervalle du type $[\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]$ si $\ell\in\mathbb{R}$, un intervalle du type $[A,+\infty[$ si $\ell=+\infty$, ou un intervalle du type $]-\infty,A]$ si $\ell=-\infty$.
  Comme $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$, il existe un voisinage V_α de α tel que $\forall x\in V_\alpha\cap I,\ f(x)\in V_\ell$. Or $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ donc les u_n appartiennent à $V_\alpha\cap I$ à partir d'un certain rang. Donc à partir de ce rang, $f(u_n)\in V_\ell$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=\ell$.
- Pour montrer la réciproque, on passe par la contraposée. Montrons donc que :

  $$f \text{ ne tend pas vers } \ell \text{ en } \alpha \Longrightarrow \text{ Il existe une suite } u \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha \text{ et } f(u_n) \text{ ne tend pas vers } \ell.$$

  On suppose que f ne tend pas vers ℓ en α. Donc il existe un voisinage V_ℓ de ℓ tel que pour tout voisinage V_α de α, il existe un point $x\in V_\alpha\cap I$ tel que $f(x)\notin V_\ell$.
  Considérons $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de voisinages de α de plus en plus resserrés autour de α. Plus précisément si $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $V_n=[\alpha-\frac{1}{n},\alpha+\frac{1}{n}]$; si $\alpha=+\infty$, on pose $V_n=[n,+\infty[$; si $\alpha=-\infty$, on pose $V_n=]-\infty,-n]$.
  Par définition de la non-convergence, chacun de ces voisinages contient un point x tel que $f(x)\notin V_\ell$. Ce point x dépend a priori de n, on le note donc u_n.
  Cela définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers α (puisque par construction, pour tout n, $u_n\in V_n$) et telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ (puisque par construction, pour tout n, $f(u_n)\notin V_\ell$).

$\square$

Exemple. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim_{x\to0}\sin(x)=0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

Remarque. Cette caractérisation peut aussi être utilisée pour montrer une non-limite.

Exercice 1. Montrer que sin n'admet pas de limite en $+\infty$.
Solution : On sait que $\lim_{n\to+\infty} 2n\pi=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi)=0$.
Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)=1$.
Donc sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

2.3 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions. Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose dans cette section que $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ existe et que $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ existe.

$\lim\limits_\alpha g$ \ $\lim\limits_\alpha f$, $\lim\limits_\alpha (f+g)$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

$\lim\limits_\alpha \lvert g\rvert$ \ $\lim\limits_\alpha \lvert f\rvert$, $\lim\limits_\alpha \lvert fg\rvert$	$\ell_1 > 0$	0	$+\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$
0	0	0	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

Remarque. Dans le cas du produit, on applique ensuite les règles de signes pour trouver des limites négatives.

Proposition 2.9 (Limite de l'inverse)

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)| = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Remarque. Les limites pour le quotient s'obtiennent ensuite à partir de celles du produit et de l'inverse.

Proposition 2.10 (Limite d'une fonction composée)

Soit α , ℓ_1 et ℓ_2 des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to\ell_1} g(x) = \ell_2$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\circ f(x) = \ell_2$.

Démonstration. On raisonne en terme de voisinages de manière à traiter tous les cas simultanément.
Soit V_2 un voisinage de ℓ_2. Comme $\lim\limits_{x\to\ell_1} g(x) = \ell_2$, il existe un voisinage V_1 de ℓ_1 tel que $\forall z \in V_1$, $g(z) \in V_2$.
Comme $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell_1$, il existe un voisinage V de α tel que $\forall x \in V$, $f(x) \in V_1$.
Donc $\forall x \in V$, $g(f(x)) \in V_2$, d'où $\lim\limits_{x\to\alpha} g\circ f(x) = \ell_2$. $\square$

2.4 Limites et relation d'ordre

Proposition 2.11 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions réelles et soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose que pour x au voisinage de α,

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Si f admet pour limite ℓ_1 en α et g admet pour limite ℓ_2 en α alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$, les autres cas se traitent de la même manière.
Soit $D = D_f \cap D_g$, où D_f est l'ensemble de définition de f et D_g celui de g. On raisonne par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$. La fonction $f - g$ a pour limite $\ell_1 - \ell_2$ en α. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1-\ell_2}{2}$.
Notre supposition donne $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1]$,

$$|(f-g)(x) - (\ell_1 - \ell_2)| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire en particulier $\ell_1 - \ell_2 - \varepsilon \leqslant f(x) - g(x)$, donc puisque $\ell_1 - \ell_2 = 2\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant f(x) - g(x)$. Donc $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1]$, $f(x) > g(x)$. Par ailleurs, on a supposé $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de α. Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, on a à la fois $f(x) > g(x)$ et $f(x) \leqslant g(x)$, ce qui est impossible. D'où le résultat. □

Remarque. En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de α et si f admet une limite ℓ en α alors $\ell \geqslant 0$.

Remarque. Attention, ce résultat devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

Proposition 2.12 (Théorème d'encadrement)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, soit f, g, h trois fonctions réelles et soit ℓ un réel. On suppose qu'au voisinage de α, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, et que f et h admettent la même limite ℓ en α. Alors g admet également pour limite ℓ en α.

Démonstration. On fait la démonstration pour $\alpha = +\infty$, les autres cas se traitent de même. Soit D l'intersection des ensembles de définition de f, g et h. Par hypothèse, il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant A$, alors $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Les fonctions f et h ont pour limite ℓ en α. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc des réels B et B' tels que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant B$, alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ et si $x \geqslant B'$, alors $|h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \geqslant \max(A, B, B')$, on a donc $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Ce qui s'écrit également : pour tout $x \in D$, si $x \geqslant \max(A, B, B')$, alors $|g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc g admet pour limite ℓ en α. □

Remarque. Ce théorème fournit **l'existence et la valeur** de la limite.

Remarque. Comme dans le cas des suites, on en déduit le corollaire suivant : si f est une fonction bornée au voisinage de α et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (fg)(x) = 0$.

Exercice 2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \to \dfrac{\cos(x)}{x}$.

<u>Solution :</u> La fonction $x \to \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (par -1 et 1), et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Remarque. Ce résultat s'étend au cas des limites infinies avec les théorèmes de comparaison :
- Si au voisinage de α, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.
- Si au voisinage de α, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

2.5 Théorème de la limite monotone

Proposition 2.13 (Théorème de la limite monotone, cas croissant)

Soit a et b des réels tels que $a < b$, et f une fonction croissante sur l'intervalle $]a, b[$. Alors pour tout point x de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x, et ces limites sont finies. De plus :
- $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a,b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a,b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque. Ce résultat reste vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Remarque. C'est un des rares résultats de ce chapitre qui ne nécessite pas la continuité de f.

Démonstration. On montre le résultat en b^-, les autres cas se montrent de même. Soit $A = f(]a, b[)$.

— Si f est majorée, l'ensemble A est non vide et majoré, et donc (théorème de la borne supérieure) possède une borne supérieure réelle M.
— Si f n'est pas majorée, on pose $M = +\infty$.

Pour montrer que la limite de f en b est bien M, il suffit (que b soit fini ou non) de démontrer que pour tout $m < M$, il existe $x_m \in]a, b[$ tel que

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad f(x) \in]m, M].$$

Soit un réel $m < M$. Par définition de M (le plus petit majorant de A dans $\mathbb{R}$ ou $+\infty$), le réel m n'est pas un majorant de A. On peut donc trouver un réel $x_m \in]a, b[$ tel que $f(x_m) > m$. La croissance de f sur $]a, b[$ et la définition de M donnent alors :

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad m < f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant M,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque. On obtient de même le comportement quand f est décroissante sur $]a, b[$:
— Pour tout point x de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x, et ces limites sont finies.
— $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a, b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$
— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a, b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des limites à droite et à gauche finies en tout point réel.

3 Continuité en un point

Définition 3.1 (Continuité)

Soit a un point de l'intervalle I. Une fonction f définie de I dans $\mathbb{R}$ est dite :
— **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$,
— **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$,
— **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque. Les propriétés des limites donnent directement que :
— lorsque a n'est pas une extrémité de I, la continuité simple équivaut à la continuité à droite et à gauche.
— si f et g sont deux fonctions continues en $a \in I$, les fonctions $(f + g)$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$), fg, $|f|$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.
— si f et h sont deux fonctions telles que la composée $h \circ f$ soit correctement définie au voisinage de a, si f est continue en a et si h est continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ est continue en a.

Proposition 3.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $a \in I$, alors :

$$f \text{ continue en } a \iff \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ on a } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Démonstration. Découle directement de la définition de la continuité en a et de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque. On retrouve le théorème du point fixe établi dans le chapitre sur les suites : si une suite u définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ, et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Définition 3.3 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, on dit que f est **prolongeable par continuité** en a. La fonction définie sur $I \cup \{a\}$ par $x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$ est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en 0, et le prolongement est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

4 Fonctions continues sur un intervalle

4.1 Définition

Définition 4.1 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit que f est **continue sur l'intervalle** I lorsque f est continue en tout point de l'intervalle I.

Exemple. Les fonctions polynômes, exp, sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer sa continuité sur $\mathbb{R}$.

<u>Solution :</u> La fonction f est égale à une fonction polynôme sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est donc continue sur ces intervalles. Reste à étudier la continuité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 = f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0-} -x^3$. La fonction est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Attention : f est également une fonction polynôme sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, mais ça ne signifie pas nécessairement qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_+$ donne une limite en 0_+ et $\mathbb{R}_-$ en 0_-, mais ces limites pourraient ne pas être égales). Il est toujours nécessaire d'étudier le raccord en 0 .

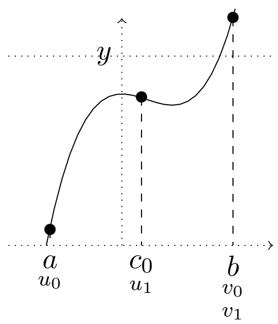
4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. On suppose $f(a) \leqslant f(b)$ (le cas $f(b) \leqslant f(a)$ se traite de même), on a donc $y \in [f(a), f(b)]$.
On veut raisonner par dichotomie, on définit donc deux suites u et v par récurrence comme suit :

- On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que u_n et v_n sont bien définis. Soit $c_n = \frac{u_n + v_n}{2}$. Si $f(c_n) \geqslant y$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = c_n$. Sinon, on pose $u_{n+1} = c_n$ et $v_{n+1} = v_n$.



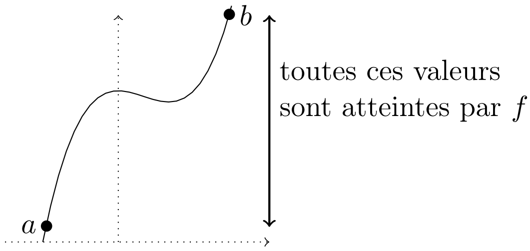
Cette construction définit bien les deux suites u et v. On étudie maintenant leurs propriétés. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $f(u_n) \leqslant y \leqslant f(v_n)$ ».

— $v_0 - u_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$ et $f(u_0) = f(a) \leqslant y \leqslant f(b) = f(v_0)$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Par construction, on a $f(u_{n+1}) \leqslant y \leqslant f(v_{n+1})$ dans chacun des deux cas. De plus, si $f(c_n) \geqslant y$, $v_{n+1} - u_{n+1} = c_n - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Sinon, $v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - c_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

On a donc bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $f(u_n) \leqslant y \leqslant f(v_n)$. En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
D'autre part, u est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = c_n$ ou $u_{n+1} = u_n$, et dans les deux cas, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$. De façon symétrique, v est décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrons maintenant que $f(\ell) = y$. Tout d'abord, on sait par construction que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$, donc par passage à la limite $\ell \in [a, b]$. La fonction f est donc continue en ℓ, ce qui donne $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = f(\ell)$.
Comme on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant y \leqslant f(v_n)$, un nouveau passage à la limite donne $f(\ell) \leqslant y \leqslant f(\ell)$, d'où $f(\ell) = y$. □

Remarque. Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle I et si f prend deux valeurs distinctes, elle atteint toutes les valeurs (intermédiaires...) comprises entre ces deux réels.



Proposition 4.3 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, on note $J = f(I)$. Soit $(x, y) \in J^2$ avec $x \leqslant y$, alors $\exists (a, b) \in I^2$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Montrons que que $[x, y] = [f(a), f(b)] \subset J$.
Soit $z \in [f(a), f(b)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de c compris entre a et b et tel que $z = f(c)$. Donc $z \in f(I) = J$. Donc $[x, y] = [f(a), f(b)] \subset J$, ce qui correspond exactement à la définition d'un intervalle. □

Exercice 4. Soit n un entier impair. Montrer que $f : x \mapsto x^n$ admet au moins une racine réelle.
<u>Solution :</u> La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $f(a) \leqslant 0$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(b) \geqslant 0$.

Donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire tel que c est racine de f.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f admet un point fixe (une valeur z de son ensemble de définition telle que $f(z) = z$).
<u>Solution :</u> Soit g la fonction définie par $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ par somme de fonctions continues. De plus, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in [0, 1]$ tel que $g(z) = 0$. donc $f(z) = z$. Donc f admet un point fixe.

4.3 Théorème des bornes atteintes

Proposition 4.4 (Théorème des bornes atteintes)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Démonstration. Hors-programme □

Remarque. Cela signifie que f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Donc $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$ existent et en couplant avec le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exercice 6. Montrer sans étude de variations que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Solution : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|f(x)| \leqslant 1$. Or f est continue sur $[0, A]$, donc bornée sur ce segment par théorème des bornes : il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0, A]$, $|f(x)| \leqslant K$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leqslant \max(K, 1)$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4.4 Théorème de la bijection

Proposition 4.5 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$. Sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Démonstration. f est continue sur I, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(I)$ est un intervalle. De plus,
- f est surjective de I dans $f(I)$ par définition de $f(I)$.
- f est strictement monotone sur I, donc f est injective sur I.

Donc f est bijective de I dans l'intervalle $f(I)$.
On suppose maintenant que f est strictement croissante sur I (le cas décroissant se traite de même). Soit a et b deux éléments de $f(I)$. Supposons que $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b)$, composer par f donne alors $a \geqslant b$. Par passage à la contraposée, on vient de montrer que $a < b \Longrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.
Montrons maintenant que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Soit $y_0 \in f(I)$, qui s'écrit $y_0 = f(a)$ avec $a \in I$. On suppose que a n'est pas une borne de I (sinon, il suffit de modifier les intervalles considérés dans la suite). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. On pose $y_1 = f(a - \varepsilon)$ et $y_2 = f(a + \varepsilon)$: y_1 et y_2 sont dans $f(I)$ et vérifient $y_1 < y_0 < y_2$ par croissance de f. On pose $\eta = \min(\frac{y_0-y_1}{2}, \frac{y_2-y_0}{2})$. On a alors :

$$|y - y_0| \leqslant \eta \Longrightarrow y_1 < y < y_2 \Longrightarrow a - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant a + \varepsilon,$$

puisque f^{-1} est croissante sur $f(I)$. Donc $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Donc f^{-1} est continue en y_0. □

Remarque. En particulier, si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et si $b \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution sur I.
Énoncé sous cette forme, ce théorème s'appelle aussi « théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone ».

Exercice 7. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.
Solution : Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
C'est une fonction polynomiale donc dérivable sur $[2, +\infty[$, avec $\forall x \in [2, +\infty[$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x + 2) > 0$ (sauf éventuellement en 2). Donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.
f est continue (car polynomiale) et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[2, +\infty[$ vers $f([2, +\infty[)$. Or $f(2) = -3$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $f([2, +\infty[) = [-3, +\infty[$.
Comme $0 \in [-3, +\infty[$, il possède un unique antécédent par f, et donc l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

Remarque. Le théorème de la bijection est un outil puissant pour définir des suites de manière implicite.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite à valeurs dans $[0,1]$ définie par la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) = 1$.
2. Montrer que la suite u converge.

Solution :

1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1} > 0$.

   La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,1]$. Comme elle est continue sur cet intervalle et qu'on a $f(0) = 0$ et $f(1) = n$, d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,n]$.
   Or $1 \in [0,n]$. Donc $f_n(x) = 1$ possède une unique solution $u_n \in [0,1]$, et la suite u est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(u_n) = 1$ (par définition de u_n) et $u_n \geqslant 0$, on a :

$$f_{n+1}(u_n) = \sum_{k=1}^{n+1} u_n^k = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 1 + u_n^{n+1} \geqslant 1 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

   La fonction f_{n+1} étant strictement croissante sur $[0,1]$, le théorème de la bijection de la question précédente indique que la fonction f_{n+1}^{-1} est strictement croissante sur $[0,n]$.
   En composant l'inégalité par f_{n+1}^{-1}, on trouve $u_n \geqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Or elle est minorée par 0. La suite u est donc convergente.

5 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque. Comme dans le cas des suites, le symbole $\leqslant$ n'a pas de sens entre deux nombres complexes. Les notions de fonction croissante/décroissante, fonction divergente vers $\pm\infty$, fonction majorée/minorée ne se généralisent donc pas dans $\mathbb{C}$. On n'a donc pas de théorème des gendarmes, pas de convergence monotone, pas de théorème de la bijection.

Définition 5.1 (Fonction bornée)

Soit $\alpha \in I$, ou une de ses extrémités. On dit que la fonction f est **bornée** au voisinage de α s'il existe un voisinage V_α de α et une constante $M \geqslant 0$ tels que $\forall x \in V_\alpha \cap I,\ |f(x)| \leqslant M$.

Remarque. f est bornée au voisinage de α si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées au voisinage de α.

Définition 5.2 (Limite)

Soit $\alpha \in I$, ou une de ses extrémités et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la fonction f admet ℓ comme **limite** en α si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_α de α tel que pour tout $x \in V_\alpha \cap I$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x\to\alpha} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_{x\to\alpha} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Remarque. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, une fonction à valeurs complexes qui admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en α est nécessairement bornée au voisinage de α. On dispose également des opérations usuelles sur les limites finies.

Définition 5.3 (Continuité)

Soit $a \in I$. On dit que f est **continue** en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque. f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ est continue en a et $\mathrm{Im}(f)$ est continue en a.

Remarque. Attention, le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus valable dans le cas des fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[0, \pi]$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$ sans jamais s'annuler.