

**Exercice 1 (★).** Calculer  $(X + 1)^5 - (X - 1)^5$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 2 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = (X - 2)^n - (X + 3)^n + 5n(X + 1)^{n-1}$ . Déterminer son degré et son coefficient dominant.

**Exercice 3 (★).** Effectuer les divisions euclidiennes dans  $\mathbb{R}[X]$  de

1.  $3X^5 + 4X^2 + 1$  par  $X^2 + 2X + 3$
2.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^3 + X + 2$
3.  $2X^3 - X^2 - X + 2$  par  $X^2 - 1$
4.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^2 + X + 2$

**Exercice 4 (★).** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On note  $R_\alpha$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$ . Montrer que  $R_\alpha(X) = P(\alpha)$ .

**Exercice 5 (★★).** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Soit  $S$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ . Montrer que  $S = 0$  si et seulement si  $P(i) = 0$ .
2. Déterminer les entiers positifs  $n$  tel que  $X^2 + 1$  divise  $X^n + 1$ .

**Exercice 6 (★★).** Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1.  $X^n - X - 1$  par  $(X - 1)(X + 2)$
2.  $X^n - X - 1$  par  $(X - 1)^2$

**Exercice 7 (★).** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  deux polynômes qui coïncident sur les entiers (c'est-à-dire tels que  $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) = Q(n)$ ). Montrer que  $P = Q$ .

**Exercice 8 (★).** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(\arctan(x)) = Q(\arctan(x))$ . Montrer que  $P = Q$ .

**Exercice 9 (★★).** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . Montrer que la fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  associée à  $P$  admet au plus  $n$  points fixes.

**Exercice 10 (★★).** Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$ .

**Exercice 11 (★).** Soit  $P(X) = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Vérifier que 1 est racine double de  $P$ .
2. Écrire la formule de Taylor pour  $P$  en 1.
3. En déduire le quotient de  $P$  par  $(X - 1)^2$ .
4. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 12 (★).** Déterminer les racines de  $P(X) = 4X^3 - 20X^2 + 27X - 9$ , puis sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
*Indication : commencer par tester si 3 est racine.*

**Exercice 13 (★).** Déterminer les racines réelles de  $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 6X - 4$ . En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 14 (★).** Soit  $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 3X + 3$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 15 (★).** Soit  $P(X) = X^5 - 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 16 (★★).** Soit  $P(X) = X^6 + 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 17 (★★★).** Soit  $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 18 (★★★).** Soit  $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ . Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 19 (★).**

1. Déterminer une primitive (intervalles à préciser) de :  $x \mapsto \frac{1}{x+1}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ .

2. En déduire une primitive (intervalles à préciser) pour chacune des fonctions suivantes :

(a)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x + 1}$       (b)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$       (c)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

**Exercice 20 (★★).** Résoudre les équations d'inconnue  $P \in \mathbb{C}[X]$  suivantes :

1.  $(P'(X))^2 = 4P(X)$

2.  $(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0$

**Exercice 21 (Type DS).** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On se propose d'étudier les polynômes  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si un tel polynôme  $T_n$  existe, alors il est unique.
2. Déterminer  $T_0(X)$ ,  $T_1(X)$  et  $T_2(X)$ .
3. Soit  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Factoriser  $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$ .
  - (b) En déduire que si  $T_{n-1}(X)$  et  $T_n(X)$  sont bien définis, on peut définir  $T_{n+1}(X)$  par la relation  $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ .
  - (c) En déduire par récurrence l'existence de  $T_n(X)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Déterminer le degré de  $T_n(X)$  et son coefficient dominant.
5. Soit  $n \geq 1$ . Déterminer les  $x \in [0, \pi]$  tels que  $\cos(nx) = 0$ . En déduire l'ensemble des racines de  $T_n(X)$  puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme  $T_n(X)$  en un point bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)(-1)^n}{2^{n-1}}.$$