Polynômes

Exercice 1 (★). Calculer $(X+1)^5 - (X-1)^5$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Résultat attendu : $(X+1)^5 - (X-1)^5 = 10X^4 + 20X^2 + 2$.

Exercice 2 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X-2)^n - (X+3)^n + 5n(X+1)^{n-1}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.
Résultat attendu : Pour $n = 1$, $P(X) = 0$.
Si $n \geqslant 2$, le degré vaut $n-2$ et le coefficient dominant vaut $\dfrac{5n(n-1)}{2} \neq 0$.

Exercice 3 (★). Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $2X^3 - X^2 - X + 2$ par $X^2 - 1$
4. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^2 + X + 2$

Résultat attendu :

1. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.
3. $2X^3 - X^2 - X + 2 = (X^2 - 1)(2X - 1) + X + 1$.
4. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + X + 2)(3X^3 - X^2 - 5X + 6) + 4X - 11$.

Exercice 4 (★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note R_α le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Montrer que $R_\alpha(X) = P(\alpha)$.
Résultat attendu : On énonce le théorème de division euclidienne, puis exploite au maximum l'information sur le degré du reste.

Exercice 5 (★★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit S le reste de la division euclidienne de P par X^2+1. Montrer que $S = 0$ si et seulement si $P(i) = 0$.
2. Déterminer les entiers positifs n tel que $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$.

Résultat attendu :

1. On énonce le théorème de division euclidienne, puis exploite l'information sur le degré du reste.
2. En utilisant la question précédente, on trouve que ce sont les $n \in \{2 + 4k | k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 6 (★★). Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $X^n - X - 1$ par $(X-1)(X+2)$
2. $X^n - X - 1$ par $(X-1)^2$

Résultat attendu : Dans les deux cas, on énonce le théorème de division euclidienne en exploitant au maximum le degré du reste. On trouve comme reste :

1. $-\dfrac{(2 + (-2)^n)}{3} X + \dfrac{(-2)^n - 1}{3}$
2. $-n + (n-1)X$

Exercice 7 (★). Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes qui coïncident sur les entiers (c'est-à-dire tels que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) = Q(n)$). Montrer que $P = Q$.
Résultat attendu : On montre que $P - Q = 0$ en utilisant les propriétés des racines.

Exercice 8 (★). Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\arctan(x)) = Q(\arctan(x))$. Montrer que $P = Q$.
Résultat attendu : On montre que $P - Q = 0$ en utilisant les propriétés des racines.

Exercice 9 (★★). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associée à P admet au plus n points fixes.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde. La contradiction provient des propriétés des racines et de l'hypothèse sur le degré.

Exercice 10 (★★). Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde. La contradiction vient de l'utilisation de la condition de l'énoncé sur les réels (dans un premier temps) puis sur un complexe bien choisi.

Exercice 11 (★)**.** Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que 1 est racine double de P.
2. Écrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. En déduire le quotient de P par $(X-1)^2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Résultat attendu :

1. $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) = 10 \neq 0$.
2. $P(X) = 5(X-1)^2 + 5(X-1)^3 + (X-1)^4$.
3. Le quotient vaut $X^2 + 3X + 1$.
4. $P(X) = (X-1)^2(X + \frac{3+\sqrt{5}}{2})(X + \frac{3-\sqrt{5}}{2})$.

Exercice 12 (★)**.** Déterminer les racines de $P(X) = 4X^3 - 20X^2 + 27X - 9$, puis sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. *Indication : commencer par tester si* 3 *est racine.*

Résultat attendu : $P(X) = (X-3)(4X^2 - 8X + 3) = 4(X-3)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$.

Exercice 13 (★)**.** Déterminer les racines réelles de $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 6X - 4$. En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Résultat attendu : 1 est racine immédiate, donc $Q(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 4)$. On ne peut pas faire mieux car $X^2 - 2X + 4$ est de discriminant strictement négatif.

Exercice 14 (★)**.** Soit $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 3X + 3$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Résultat attendu : $P(X) = 4(X+1)\left(X^2 + \frac{3}{4}\right) = 4(X+1)\left(X + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 15 (★)**.** Soit $P(X) = X^5 - 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Résultat attendu : $P(X) = \prod_{k=0}^{4}(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)$.

Exercice 16 (★★)**.** Soit $P(X) = X^6 + 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Résultat attendu : $P(X) = (X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{3i\pi}{6}})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})(X - e^{9\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{11i\pi}{6}})$, puis $P(X) = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)$.

Exercice 17 (★★★)**.** Soit $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Résultat attendu : Commencer par factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$ donne :
$P(X) = (X+1)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{5i\pi}{3}})(X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X+i)(X - e^{-\frac{i\pi}{6}})(X-i)(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})$,
$P(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Exercice 18 (★★★)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$. Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Résultat attendu : Commencer par factoriser $Y^2 - 2\cos(n\theta)Y + 1$ donne :

$$P(X) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\theta}e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{-i\theta}e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

Exercice 19 (★).

1. Déterminer une primitive (intervalles à préciser) de : $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
2. En déduire une primitive (intervalles à préciser) pour chacune des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x+1}$
   (b) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x^2+1}$
   (c) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x^2-1}$

Résultat attendu :

1. Des primitives sont $x \mapsto \ln|x+1|$ (sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$), puis $x \mapsto \arctan(x)$ (sur $\mathbb{R}$) et $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1|$ (sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$).
2. (a) Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5\ln|x+1|$ (sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$).
   (b) Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - x + 4\arctan(x) - \dfrac{5}{2}\ln\left|x^2+1\right|$ (sur $\mathbb{R}$).
   (c) Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{5}{2}\ln|x+1|$ (sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$).

Exercice 20 (★★). Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivantes :

1. $(P'(X))^2 = 4P(X)$
2. $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$

Résultat attendu : Les ensembles de solutions sont :

1. $\{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \middle| b \in \mathbb{C}\right\}$
2. $\{\lambda(X^3+X) | \lambda \in \mathbb{C}\}$

Exercice 21 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un tel polynôme T_n existe, alors il est unique.
2. Déterminer $T_0(X)$, $T_1(X)$ et $T_2(X)$.
3. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$.
   (b) En déduire que si $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définis, on peut définir $T_{n+1}(X)$ par la relation $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
   (c) En déduire par récurrence l'existence de $T_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le degré de $T_n(X)$ et son coefficient dominant.
5. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les $x \in [0, \pi]$ tels que $\cos(nx) = 0$. En déduire l'ensemble des racines de $T_n(X)$ puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme $T_n(X)$ en un point bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Résultat attendu :

1. Soit P et Q deux polynômes vérifiant la relation. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \cos(nx) = Q(\cos(x))$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P-Q)(\cos(x)) = 0$, c'est-à-dire $\cos(x)$ est racine de $P-Q$. Donc tous les éléments de $[-1,1]$ sont racines de $P-Q$. Comme il y en a une infinité, on en déduit que $P-Q=0$, c'est-à-dire $P=Q$. D'où l'unicité.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(0x) = 1$, donc $T_0(X) = 1$ convient. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(1x) = \cos(x)$, donc $T_1(X) = X$ convient. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $T_2(X) = 2X^2 - 1$ convient.
3. (a) Les formules trigonométriques donnent $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx)$.
   (b) On suppose que $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définis. Alors la question précédente donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x)T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) = \cos((n+1)x)$. On peut donc définir $T_{n+1}(X)$ par la relation $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « le polynôme $T_n(X)$ existe ».
   — $T_0(X)$ et $T_1(X)$ existent d'après la question 2. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies. Donc $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définies. Par la question précédente, on en déduit que $T_{n+1}(X)$ existe. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Le principe de récurrence double donne alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(X)$ existe.
4. $T_0(X)$ a pour degré 0 et pour coefficient dominant 1.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: « $T_n(X)$ a pour degré n et pour coefficient dominant 2^{n-1} ».
   — $T_1(X) = X$ a pour degré 1 et pour coefficient dominant $1 = 2^0$, donc $P(1)$ est vraie.
   — $T_2(X) = 2X^2 - 1$ a pour degré 2 et pour coefficient dominant $2 = 2^1$, donc $P(2)$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies. Il existe donc un polynôme Q de degré inférieur à $n-1$ tel que $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + Q(X)$.
   Donc $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) = 2^nX^{n+1} + 2XQ(X) - T_{n-1}(X)$, ce qui donne que $T_{n+1}(X)$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence double, on en déduit le résultat annoncé.
5. Soit $x \in [0, \pi]$, $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]$ tq $x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   Or les racines de $T_n(X)$ sont les cosinus de ces valeurs, donc $T_n(X) = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\right)$.
6. En particulier $T_n(0) = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\right)$. Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{T_n(0)(-1)^n}{2^{n-1}}$.
   Or, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc $T_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2})$. On en déduit le résultat annoncé.