

Dérivabilité

Exercice 1 (★). Soit φ une fonction dérivable sur $[-1, 1]$ vérifiant $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$. Montrer que φ' s'annule au moins une fois.

Exercice 2 (★★). Soit $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 3 (★★). Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(0) = g(3) = 0$ et $g(1)g(2) < 0$. Montrer que g'' s'annule.

Exercice 4 (★★★). Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I . On suppose que f est continue et injective. Montrer que f est strictement monotone sur I .

Exercice 5 (★). Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne.

Exercice 6 (★★). Soit $g \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} g' = 1 = \lim_{-\infty} g'$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (★). Soit $f : t \mapsto \sqrt{t+1}$ (définie sur $[-1, +\infty[$).

1. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a, b]$, où $-1 < a < b$.
3. f est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Exercice 8 (★★). Soit $g : t \mapsto e^{-t} + t^2$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que g est lipschitzienne sur $[0, 1]$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Exercice 9 (★★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Soit h une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $h(a) = h(b) = 0$, et soit $c \in]a, b[$.
 - (a) Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel la fonction $g : x \mapsto h(x) - \beta(x-a)(x-b)$ s'annule en a , b et c .
 - (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que $h(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} h''(\gamma)$.
2. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$. On note φ la fonction affine (droite) qui interpole f en a et b (c'est-à-dire telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$).
 - (a) Soit $x \in [a, b]$, déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x .
 - (b) Déduire de la question 1 que : $\forall x \in]a, b[, \exists \gamma \in]a, b[$ tel que $f(x) = \varphi(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma)$.
 - (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque $f'' \geq 0$?

Exercice 10 (★★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ puis prouver que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.
2. $g : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$.

Exercice 12 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $P_n^{(k)}$ admet (au moins) k racines distinctes strictement comprises entre -1 et 1 .

Exercice 13 (★). Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
2. $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(u) \leq u$ et $2u \leq \pi \sin(u)$

Exercice 14 (★★). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 2 \exp(\frac{x}{2}) - 1$.

Exercice 15 (★★). Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \rightarrow \frac{x^3}{x^2 + 12}$
2. $g : x \rightarrow |x|$

Exercice 16 (★★). Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1 + a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$.

Exercice 17 (Type DS). L'objectif de cet exercice est d'établir la convergence de la méthode de Newton, très utile pour déterminer (par valeurs approchées) des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$. Soit deux réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]a, b[$.
 (b) Soit $x_0 \in [a, b]$ et m l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_0 (dont on rappellera l'équation) et de l'axe des abscisses. Faire un schéma de la situation. Montrer que $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
2. (a) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Justifier que g est de classe C^1 sur $[a, b]$.
 (b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
3. On suppose, dans cette question 3 seulement, que $\forall x \in [a, b], f''(x) \leq 0$. On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.
 (a) Étudier le signe de g' et en déduire les variations de la fonction g .
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$, puis qu'elle est croissante, convergente, et que sa limite vaut α .
4. On revient au cas général.
 (a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 (b) Justifier que $\forall (x, y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$.
 (c) Établir que $\forall x \in I, g(x) \in I$. *Indication : par définition de I , $x \in I \Leftrightarrow |x - \alpha| \leq h$.*
 (d) En déduire que si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α .