Espaces vectoriels

Exercice 1 (★). Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
2. E_2 est l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y - z = 0\}$.
4. $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.
6. E_6 est l'ensemble des fonctions $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y' + e^{-t}y = 0$.

Exercice 2 (★). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble F_2 des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. L'ensemble F_6 des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré exactement n.

Exercice 3 (★). Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. (h_0, h_1, h_2) où ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $h_0 : x \longrightarrow 1$, $h_1 : x \longrightarrow e^x$ et $h_2 : x \longrightarrow e^{2x}$.
3. (u, v) avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Exercice 4 (★). Soit u, v et w trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille (u, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 5 (★★). Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?

Exercice 6 (★★). Soit n un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $f_0 : x \longrightarrow 1$ et pour tout entier naturel non nul k, $f_k : x \longrightarrow \cos^k(x)$. La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$?

Exercice 7 (★). On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base de chacun d'eux.

Exercice 8 (★). Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E. Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

Exercice 9 (★★). Montrer que les polynômes 1, X, $X(X - 1)$, $X(X - 1)(X - 2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 10 (★★). Soit f et g les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = x\exp(2x)$.
On note E l'ensemble des fonctions h telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. La famille (f, g) est-elle une famille libre de E ? une base de E ?
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction φ est-elle un élément de E ?

Exercice 11 (★★). Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 12 (★★). Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(X - 1, X)$ et $G = \{P \in E | P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 13 (★★). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = P \oplus I$.

Exercice 14 (★★). Soit E un espace vectoriel et F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. Montrer les inclusions :

1. $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$
2. $(F \cap G) + H \subset (F + H) \cap (G + H)$

Exercice 15 (Type DS). Soit F l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On pose a et b les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$.
   (a) Montrer que (a, b) est une famille d'éléments de F.
   (b) Montrer que (a, b) est une famille génératrice de F.
   (c) Montrer que (a, b) est une famille libre de F.
   (d) Que peut-on déduire des questions précédentes ?