Espaces vectoriels

Exercice 1 (★). Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
2. E_2 est l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y - z = 0\}$.
4. $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin(x) + b \cos(x)\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.
6. E_6 est l'ensemble des fonctions $y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y' + e^{-t} y = 0$.

Résultat attendu :

1. Non 2. Oui 3. Oui 4. Oui 5. Non 6. Oui

Exercice 2 (★). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble F_2 des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. L'ensemble F_6 des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré exactement n.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Non 3. Non 4. Oui 5. Non 6. Non

Exercice 3 (★). Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. (h_0, h_1, h_2) où ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $h_0 : x \longrightarrow 1$, $h_1 : x \longrightarrow e^x$ et $h_2 : x \longrightarrow e^{2x}$.
3. (u, v) avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Oui 3. Non

Exercice 4 (★). Soit u, v et w trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille (u, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Résultat attendu : Les deux familles sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5 (★★). Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?
Résultat attendu : La famille est libre, mais pas génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$.

Exercice 6 (★★). Soit n un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $f_0 : x \longrightarrow 1$ et pour tout entier naturel non nul k, $f_k : x \longrightarrow \cos^k(x)$. La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$?
Résultat attendu : Oui. Pour le montrer, on introduit un polynôme aux coefficients bien choisi et on se ramène à montrer qu'il s'agit du polynôme nul.

Exercice 7 (★). On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base de chacun d'eux.
Résultat attendu : Exemples de bases convenant (d'autres peuvent être possibles) :

1. $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$
2. $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$
3. $((1, 1, 1, 1))$

Exercice 8 (★). Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E. Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

Résultat attendu :

1. Oui, une base est $((0,1,0),(0,0,1))$.
2. Oui, une base est $((1,2,1))$.
3. Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E (F ne contient pas $(0,0)$).

Exercice 9 (★★). Montrer que les polynômes 1, X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.
Résultat attendu : La famille est échelonnée en degré donc libre. On montre ensuite que $X^2 = X(X-1)+X$ et $X^3 = X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X$, ce qui permet de montrer que la famille est génératrice en revenant à la définition.

Exercice 10 (★★). Soit f et g les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = x\exp(2x)$. On note E l'ensemble des fonctions h telles qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (ax+b)e^{2x}$.

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. La famille (f,g) est-elle une famille libre de E ? une base de E ?
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction φ est-elle un élément de E ?

Résultat attendu :

1. E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. La famille est constituée de vecteurs de E, libre et génératrice de E, donc c'est une base de E.
3. On montre par l'absurde que $\varphi \notin E$.

Exercice 11 (★★). Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3, (b,c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?
Résultat attendu : Oui, on le montre par exemple par analyse-synthèse, en exhibant pour tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ une décomposition unique dans $F+G$.

Exercice 12 (★★). Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \operatorname{Vect}(X-1, X)$ et $G = \{P \in E | P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Résultat attendu :

1. G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc un espace vectoriel.
2. On montre $E = F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Variante : pour tout élément de E on montre qu'il existe une unique décomposition dans $F+G$.

Exercice 13 (★★). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = P \oplus I$.
Résultat attendu : On montre que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E en revenant à la définition. Pour montrer que $E = P \oplus I$, il suffit de montrer que toute fonction $f \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de P et d'un élément de I.

Exercice 14 (★★). Soit E un espace vectoriel et F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. Montrer les inclusions :

1. $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F+G) \cap H$
2. $(F \cap G) + H \subset (F+H) \cap (G+H)$

Résultat attendu : Dans les deux cas, il faut se ramener à la définition d'une inclusion d'ensembles, puis traduire étape par étape les informations dont on dispose.

Exercice 15 (Type DS)**.** Soit F l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On pose a et b les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$.
   (a) Montrer que (a, b) est une famille d'éléments de F.
   (b) Montrer que (a, b) est une famille génératrice de F.
   (c) Montrer que (a, b) est une famille libre de F.
   (d) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Résultat attendu :

1. La suite nulle vérifie $\forall n \geqslant 0$, $0 = 0 + 2 \times 0$, elle est donc dans F.
   Soit u et v deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}(\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + v_{n+1} + 2v_n \text{ car } (u, v) \in F^2 \\ &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + 2(\lambda u_n + v_n) \\ (\lambda u + v)_{n+2} &= (\lambda u + v)_{n+1} + 2(\lambda u + v)_n\end{aligned}$$
   Donc $\lambda u + v \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Donc F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.·
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + 2b_n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} = b_{n+2}$.
   De même, $a_{n+1} + 2a_n = (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n(-1 + 2) = (-1)^n = (-1)^{n+2} = a_{n+2}$.
   Donc a et b sont des suites de F.
   (b) Soit $u \in F$. La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $q^2 = q + 2$ qui équivaut à $q^2 - q - 2 = 0$. Le discriminant associé vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, les solutions de cette équation sont donc $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Il existe donc deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
   Donc u est combinaison linéaire de a et b. Comme par la question précédente, $(a, b) \in F^2$, (a, b) est une famille génératrice de F.
   (c) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda a + \mu b = 0$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda(-1)^n + \mu 2^n = 0$. En particulier, pour $n = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$, $-\lambda + 2\mu = 0$. Sommer ces égalités donne $3\mu = 0$, donc $\mu = 0$, on en déduit $\lambda = 0$. La famille (a, b) est donc libre.
   (d) D'après les questions précédentes la famille (a, b) est une famille d'éléments de F libre et génératrice, c'est donc une base de F.