Espaces vectoriels

Cours de É. Bouchet – PCSI

6 février 2024

Table des matières

Les espaces vectoriels introduisent un langage commun pour des situations qui apparaissent à priori très différentes (vecteurs, fonctions, polynômes, suites, matrices, ...) et permettent ainsi de résoudre avec la même méthode des problèmes concernant des domaines différents.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble non vide, muni d'une addition interne $+ : E \times E \to E$ et d'une multiplication externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** lorsque :

- L'opération interne $+$ vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$ (la loi $+$ est *commutative*),
  - pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (la loi $+$ est *associative*),
  - il existe un unique $e \in E$ appelé **élément neutre** tel que pour tout $x \in E$, $x + e = x = e + x$.
  - pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = e = x' + x$. Cet élément est unique, appelé **opposé** de x, et noté $-x$.
- L'opération externe $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
  - pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
  - pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$

On appelle **vecteurs** les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration. On va montrer l'unicité de l'élément neutre, et l'unicité de l'opposé.

- Supposons qu'on a deux éléments neutres, e et e'. Alors, comme e et e' sont éléments neutres, $e + e' = e'$ et $e + e' = e$. D'où $e = e'$, ce qui donne l'unicité de l'élément neutre.
- Soit $x \in E$, supposons que y et y' sont deux opposés de x. Alors $y + x = e$ et $y' + x = e$. Or $y' + x + y = y + x + y'$, donc $e + y = e + y'$. Donc $y = y'$, d'où l'unicité de l'opposé.

$\square$

Exemple. Les règles de calcul sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ donnent directement que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $x + y$ comme $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une opération interne dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie les propriétés :
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,
    $(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1, x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z)$.
  - il existe un élément $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x + e = x = e + x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + x' = e = x' + x$.
- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
    $(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
    $\alpha \cdot (x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta) \cdot x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple. L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un réel par un vecteur, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Son élément neutre est le vecteur nul.

Remarque. Le symbole de l'opération externe $\cdot$ est parfois omis. Qu'il soit présent ou pas, il faut toujours placer le scalaire à gauche du vecteur.

Remarque. L'élément neutre pour $+$ est souvent noté 0_E, ou 0 lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Proposition 1.2 (Cas d'un produit valant 0_E)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration. On montre successivement les deux implications, en commençant par la réciproque.

- Pour tout $x \in E$, $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. D'où en ajoutant $-0x$ des deux côtés, $0x = 0_E$.
  De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$. D'où $\lambda 0_E = 0_E$.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda x = 0_E$. On suppose que $\lambda \neq 0$. En calculant de deux manières différentes, on a :
  $$\frac{1}{\lambda}\lambda x = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda}\lambda x = \frac{\lambda}{\lambda}x = 1x = x.$$
  D'où $x = 0_E$.

□

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \cdot x = (0,0) \iff \lambda = 0$ ou $x = (0,0)$.

Proposition 1.3 (Construction de l'opposé)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors pour tout $x \in E$, $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E.

Démonstration. Soit $x \in E$, $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1-1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$. Donc $-x = (-1) \cdot x$. □

1.2 Espaces vectoriels de référence

Pour montrer les résultats qui suivent, on vérifie mécaniquement toutes les propriétés, comme dans l'exemple 1.1.

Proposition 1.4 ($\mathbb{K}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Muni des opérations usuelles, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathbb{K}^n$ est le n-uplet $(0, \ldots, 0)$.

Proposition 1.5 ($\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de taille $n \times p$.

Proposition 1.6 ($\mathbb{K}[X]$)

Muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

Proposition 1.7 ($E \times F$)

Soit E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Muni des opérations usuelles, le produit cartésien $E \times F$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $E \times F$ est $(0_E, 0_F)$.

Proposition 1.8 ($\mathcal{F}(\Omega, F)$)

Soit Ω un ensemble non vide et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Muni des opérations usuelles, l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, F)$ des applications de Ω dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathcal{F}(\Omega, F)$ est l'application nulle de Ω dans F (l'application qui à tout élément de Ω associe 0_F).

Remarque. Ω n'a pas besoin d'être un espace vectoriel pour que le résultat soit valide.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son élément neutre est la suite nulle.

Exemple. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^A$ des applications de A dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son élément neutre est la fonction nulle.

1.3 Combinaison linéaire

Définition 1.9 (Famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une **famille finie de vecteurs** de E lorsque tous les e_i appartiennent à E.

Exemple. $(1, 0)$, $(0, 1, 3)$ et $(1, 2, 2, 4)$ sont trois familles finies de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.
$((1, 0), (2, 3), (2, 1))$ est une famille finie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.10 (Combinaison linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E et $x \in E$. On dit que x est **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{S}$ lorsqu'il existe p scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k.$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Alors il existe des scalaires $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc P est combinaison linéaire de $(1, X, \ldots, X^n)$.

Exercice 1. Montrer que $(4, 13)$ est combinaison linéaire de $((1, 5), (2, 3))$.
<u>Solution :</u> On résout (au brouillon) l'équation $(4, 13) = \alpha_1(1, 5) + \alpha_2(2, 3)$, d'inconnues α_1 et α_2 :

$$\begin{cases} 4 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 13 &= 5\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2 \text{ et } \alpha_2 = 1.$$

Rédaction finale : on remarque que $(4, 13) = 2(1, 5) + (2, 3)$, donc $(4, 13)$ est combinaison linéaire de $((1, 5), (2, 3))$.

Exercice 2. Montrer que $(1, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$.
<u>Solution :</u> Supposons que $(1, 1)$ soit combinaison linéaire des vecteurs. Alors il existe des réels $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tels que $(1, 1) = \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(0, 1) + \alpha_3(0, 2)$. Donc $(1, 1) = (0, \alpha_2 + 2\alpha_3)$. Donc $1 = 0$, ce qui est absurde.
Donc $(1, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E stable par combinaison linéaire. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Dire que F est stable par combinaison linéaire signifie que toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F.

Exemple. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ (sous-espace nul) et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 2.2 (Cas de l'élément neutre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $0_E \in F$.

Démonstration. Par propriétés des espaces vectoriels, F possède un élément neutre pour la loi $+$, qu'on note 0_F. $0 \in \mathbb{K}$, donc la stabilité par combinaison linéaire donne $0 \cdot 0_F \in F$. Or $0_F \in E$, donc $0 \cdot 0_F = 0_E$. Donc $0_E \in F$. □

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'unicité de l'élément neutre donne donc $0_F = 0_E$.

Proposition 2.3 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot x) + y \in F.$$

Démonstration. Montrons le sens direct, puis la réciproque.

- Si F est sous-espace vectoriel de E, il contient 0_E d'après le résultat précédent. De plus, il est stable par combinaison linéaire, donc $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $(\alpha \cdot x) + y$ appartient à F. D'où le résultat annoncé.
- On suppose que $0_E \in F$ et que $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha \cdot x) + y \in F$. On revient à la définition :
  - En prenant $\alpha = 1$, la relation garantit que l'opération $+$ définie sur $F \times F$ est à valeurs dans F.
  - En prenant $y = 0_E \in F$, la relation garantit que l'opération $\cdot$ définie sur $\mathbb{K} \times F$ est à valeurs dans F.
  - $0_E \in F$, il existe donc un élément neutre dans F.
  - Soit $x \in F$. Comme $-1 \in \mathbb{K}$, alors $-1 \cdot x \in F$. Donc $-x \in F$ et x admet un opposé dans F.
  - Les autres propriétés ne demandent aucune vérification car une relation vraie sur E l'est aussi sur F.

  Donc F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La relation garantit de plus la stabilité par combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarque. Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, revenir à la définition est peu pratique. Il est beaucoup plus rapide de montrer par la caractérisation ci-dessus que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Solution :

- La suite nulle converge (vers 0), donc est dans E.
- Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2$, on note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites réelles respectives. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Alors $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, et par propriétés des suites convergentes, elle converge vers la limite $\lambda \ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$. Donc $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Donc E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble D des suites réelles divergentes n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Solution : D ne contient pas la suite nulle, donc n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5. L'ensemble E' des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $f(0) = 0$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
Solution :

— La fonction nulle est dans E' (car elle vaut 0 en 0).

— Soit $(f, g) \in (E')^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda f + g \in E'$.

Donc E' est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc E' est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
Solution :

— $\deg(0) = -\infty \leqslant n$, donc $0 \in \mathbb{C}_n[X]$.

— Soit $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda P + Q \in \mathbb{C}[X]$, et :

$$\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg(Q)).$$

Or $\deg(Q) \leqslant n$ et $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P) \leqslant n$. Donc $\deg(\lambda P + Q) \leqslant n$ et $\lambda P + Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

Donc $\mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Donc $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Variante de ce raisonnement en utilisant les coefficients plutôt que le degré :

— $0 = \sum_{k=0}^{n} 0X^k$, donc $0 \in \mathbb{C}_n[X]$.

— Soit $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(\alpha_k) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(\beta_k) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k X^k$. Donc

$$(\lambda P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \alpha_k + \beta_k)(X).$$

Donc $\lambda P + Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

Donc $\mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Donc $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 2.4 (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

— Par propriété d'un sous-espace vectoriel, $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Donc $0_E \in F \cap G$.

— Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Comme $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x + y \in F$. De même, $\lambda x + y \in G$.
Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque. Ce résultat se généralise à l'intersection de plus de deux sous-espaces vectoriels.

Remarque. Attention : de manière générale, la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est PAS un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7. $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Solution : Il contient $(0, 1)$ et $(1, 0)$, mais pas leur somme $(1, 1)$, donc ce n'est pas un espace vectoriel.

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Définition 2.5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E. On note $\text{Vect}(\mathcal{S})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{S}$.
$\text{Vect}(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $\mathcal{S}$.

Démonstration. On revient à la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

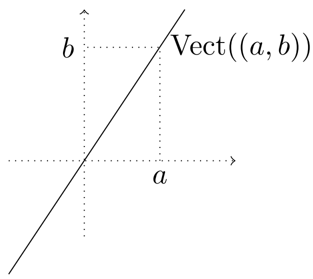
— $0_E = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_p$, donc $0_E \in \text{Vect}(\mathcal{S})$.

— Soit x et y deux vecteurs de $\text{Vect}(\mathcal{S})$, et λ un scalaire. Donc $\exists(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\exists(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$. On peut alors écrire :

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{i=1}^{p} y_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i)\, e_i \in \text{Vect}(\mathcal{S}).$$

Donc $\text{Vect}(\mathcal{S})$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\text{Vect}((a, b))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ appelé droite vectorielle :



Exemple. Soit (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Alors $\text{Vect}((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, appelé plan vectoriel.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\text{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (qui forme donc un espace vectoriel).

Proposition 2.6 (Sous-espace contenant une famille)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E. Tout sous-espace vectoriel de E contenant les e_i contient $\text{Vect}(\mathcal{S})$.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant tous les e_i et soit $x \in \text{Vect}(\mathcal{S})$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On sait que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $e_i \in F$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc F est stable par combinaison linéaire. Donc $x \in F$. Cela montre $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset F$, d'où le résultat annoncé. □

Exercice 8. Montrer que $\text{Vect}((1, 2), (1, 0)) = \mathbb{R}^2$.
<u>Solution :</u> L'inclusion $\text{Vect}((1, 2), (1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ est immédiate. Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1, 2) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1, 0) \in \text{Vect}((1, 2), (1, 0)),$$

d'où $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}((1, 2), (1, 0))$. Par double inclusion, on a donc égalité des deux ensembles.

Proposition 2.7 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie de vecteurs de E. Si $x \in \mathcal{S}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}')$, où $\mathcal{S}'$ est la famille obtenue en retirant x à $\mathcal{S}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{S}$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ la famille obtenue en retirant x à $\mathcal{S}$.

- $\mathcal{S}$ contient tous les éléments de $\mathcal{S}'$, donc $\mathrm{Vect}(S') \subset \mathrm{Vect}(S)$.
- Réciproquement, $\mathrm{Vect}(\mathcal{S}')$ est un espace vectoriel qui contient tous les éléments de $\mathcal{S}'$ et leurs combinaisons linéaires, donc qui contient x. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{S}')$ contient tous les éléments de $\mathcal{S}$. Donc $\mathrm{Vect}(S) \subset \mathrm{Vect}(S')$.

Donc par double inclusion, $\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{S}')$. □

Exemple. $(3, 6) = 3(1, 2)$, donc $\mathrm{Vect}((1, 2), (3, 6)) = \mathrm{Vect}((1, 2)) = \{(\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3 Familles finies de vecteurs

3.1 Familles génératrices

Définition 3.1 (Famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie d'éléments de E. La famille $\mathcal{S}$ est dite **génératrice** de E lorsque $\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = E$.

Remarque. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) \subset E$ est évidente. Pour prouver que $\mathcal{S}$ est génératrice de E, il suffit donc de montrer que $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire de montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{S}$.

Exemple. Si $P(X) \in \mathbb{K}_2[X]$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Les vecteurs X^2, X et 1 sont bien dans $\mathbb{K}_2[X]$, donc $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 9. La famille $((1, 0), (1, 1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
<u>Solution :</u> Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut écrire $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$. De plus $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sont bien des éléments de $\mathbb{R}^2$. Donc $((1, 0), (1, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. La famille $((1, 0))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
<u>Solution :</u> $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, montrons par l'absurde qu'il ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des éléments de la famille. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(0, 1) = \lambda(1, 0) = (\lambda, 0)$. Alors $1 = 0$: absurde. Donc la famille $((1, 0))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y\}$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une famille génératrice.
<u>Solution :</u>

Méthode 1 : on gère les deux objectifs successivement.

- $0 = 2 \times 0$, donc $(0, 0, 0) \in E$.
- Soit $a = (x_a, y_a, z_a)$ et $b = (x_b, y_b, z_b)$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Alors $\lambda a + b = (\lambda x_a + x_b, \lambda y_a + y_b, \lambda z_a + z_b)$, et $\lambda x_a + x_b = \lambda 2y_a + 2y_b = 2(\lambda y_a + y_b)$, puisque a et b sont dans E. Donc $\lambda a + b \in E$.

E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $(x, y, z) \in E$. Alors $x = 2y$. Donc

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = (2y, y, 0) + (0, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Or $(2, 1, 0) \in E$ et $(0, 0, 1) \in E$. Donc $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de E.

Méthode 2 : on gère les deux objectifs simultanément. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u \in E \iff x = 2y \iff u = (2y, y, z) \iff u = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \iff u \in \mathrm{Vect}((2, 1, 0), (0, 0, 1)),$$

car on a bien $(2, 1, 0) \in E$ et $(0, 0, 1) \in E$. Donc $E = \mathrm{Vect}((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ ce qui redonne le même résultat.

Proposition 3.2 (Famille contenant une famille génératrice)

Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice de l'espace vectoriel E est une famille génératrice de l'espace vectoriel E.

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{S}'$ une famille de vecteurs qui contient les vecteurs de $\mathcal{S}$. Les propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés donnent directement $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset \text{Vect}(\mathcal{S}') \subset E$. Or $\text{Vect}(S) = E$ puique $\mathcal{S}$ est une famille génératrice de E. Donc $\text{Vect}(\mathcal{S}') = E$ et $\mathcal{S}'$ est aussi une famille génératrice de E. □

Proposition 3.3 (Cas d'un élément combinaison linéaire des autres)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{S}$ est une famille génératrice de E. Si $x \in \mathcal{S}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$, alors la famille $\mathcal{S}'$ obtenue en retirant x à $\mathcal{S}$ est aussi génératrice de E.

Démonstration. Les propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés et des familles génératrices donnent directement $E = \text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}')$. Donc $\mathcal{S}'$ est génératrice de E. □

3.2 Familles libres

Définition 3.4 (Famille libre, famille liée)

Une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de l'espace vectoriel E est dite **libre** lorsque pour tout p-uplet $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de scalaires de $\mathbb{K}^p$,

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_k = 0.$$

On dit alors que les vecteurs e_1, e_2, …, e_p sont **linéairement indépendants**. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque. Si $x \in E$ et $x \neq 0_E$, alors la famille (x) est libre.

Remarque. Pour montrer qu'une famille est libre, on fixe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$ et on cherche à en déduire que tous les α_i sont nuls.

Exercice 12. Montrer que la famille $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ obtenue précédemment est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
<u>Solution :</u> Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda(2, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Alors $(2\lambda, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, ce qui donne $\lambda = \mu = 0$. Donc $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Montrer que $((1, 2), (3, 6))$ est une famille liée.
<u>Solution :</u> $-3 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (3, 6) = (0, 0)$, alors que ni -3 ni 1 ne sont nuls, la famille est donc liée.

Proposition 3.5 (Unicité de la décomposition dans une famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E est libre si et seulement si pour tous scalaires α_1, α_2, …, α_p, β_1, β_2, … , β_p de $\mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_j e_j \Longrightarrow \forall m \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_m = \beta_m$.

Démonstration. Cela découle directement de l'équivalence :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_j e_j \Rightarrow \forall m \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_m = \beta_m\right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \beta_k) e_k = 0_E \Rightarrow \forall m \in [\![1, p]\!], \quad (\alpha_m - \beta_m) = 0\right)$$

□

Remarque. La liberté d'une famille permet donc d'identifier les coefficients dans une égalité.

Exercice 14. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$. La famille (f, g) est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles ?
<u>Solution :</u> Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f + \mu g = 0$. Alors pour tout x réel, $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$. En particulier, on peut diviser par $e^x > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu e^x = 0$. En prenant la limite pour $x \to -\infty$, on obtient $\lambda = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu e^x = 0$. La valeur en $x = 0$ donne $\mu = 0$. On a montré que $\lambda = \mu = 0$, la famille est donc libre.

Exercice 15. Montrer que la famille $(X+2, X+1, X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
Solution : Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\alpha_1(X+2)+\alpha_2(X+1)+\alpha_3X^2 = 0$. En regroupant les coefficients, on trouve :

$$(2\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_3X^2 = 0.$$

Par identification des coefficients du polynôme ($0 = 0 + 0X + 0X^2$), on obtient $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$, ce qui donne en résolvant le système linéaire $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille $(1, X+1, X^2)$ est donc libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 3.6 (Famille de polynômes échelonnée en degré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si la famille est **échelonnée en degré** (c'est-à-dire si $0 \leqslant \deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n)$), alors elle est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k(X) = 0$.
Supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls. On peut alors définir $i = \max\{k \in [\![1, n]\!] | \lambda_k \neq 0\}$, ce qui donne $\sum_{k=1}^{i} \lambda_k P_k(X) = 0$. Or la famille est échelonnée en degré, donc P_i est de degré strictement supérieur aux autres polynômes de la somme. De plus, $\lambda_i \neq 0$, donc $\deg(\sum_{k=1}^{i} \lambda_k P_k(X)) = \deg(P_i(X)) \geqslant 0$. Or cette somme est égale au polynôme nul, qui est de degré $-\infty$: absurde.
Donc tous les λ_k sont nuls, donc la famille est libre. □

Exemple. La famille $(1, (X+1)^5, (X-2)^7)$ est échelonnée en degrés, donc libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 3.7 (Sous-famille d'une famille libre)

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre. On va montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ reste libre, le résultat général se montre ensuite par récurrence décroissante.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ des scalaires, on suppose que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k = 0_E$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k + 0 \cdot e_p = 0_E$. Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, alors pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\alpha_k = 0$. Donc $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ est une famille libre. □

Proposition 3.8 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire des autres)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque. En particulier toute famille qui contient l'élément neutre est liée, car si $e_1 = 0_E$, $e_1 = 0e_2 + \ldots + 0e_p$.

Démonstration. On fait la preuve en deux temps :

— Supposons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est liée. Alors il existe $(\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ et $j \in [\![1, p]\!]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0_E$ et $\alpha_j \neq 0$. On peut donc écrire $e_j = -\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i - \sum_{i=j+1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i$.

— Réciproquement, on suppose qu'il existe $j \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_i)_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{j\}} \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que $e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \beta_i e_i + \sum_{i=j+1}^{p} \beta_i e_i$.
En posant $\beta_j = -1 \neq 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i = 0_E$, où les β_i ne sont pas tous nuls. La famille est donc liée.

□

Remarque. Si on ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ses éléments, on obtient donc une nouvelle famille libre.

Exercice 16. La famille $((0,1,2),(0,2,1),(0,1,1))$ est-elle libre ?
Solution : On cherche à montrer que la famille est libre. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels, on suppose que :

$$\lambda_1(0,1,2)+\lambda_2(0,2,1)+\lambda_3(0,1,1)=(0,0,0).$$

On aurait alors $(0,\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$, et donc :

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 &=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2 &=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1 &=\lambda_2\\ \lambda_3 &=-3\lambda_2\end{cases}$$

Cela ne permet pas de conclure directement, mais permet de construire un contre-exemple.
Rédaction finale : $(0,1,1)=\frac{1}{3}(0,1,2)+\frac{1}{3}(0,2,1)$, donc la famille est liée.

3.3 Bases

Définition 3.9 (Base, coordonnées)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une **base** de E lorsque tout vecteur x de E peut s'écrire d'une manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, …, e_p.
On appelle alors **coordonnées** de x les coefficients de cette combinaison linéaire.

Exemple. $(1,X,X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et les coefficients de $1+3X^2$ dans cette base sont 1, 0 et 3.

Proposition 3.10 (Caractérisation des bases)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille finie d'éléments de E est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{S}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie d'éléments de E.

— On suppose que $\mathcal{S}$ est une base de E. La famille $\mathcal{S}$ est composée d'éléments de E et tout vecteur de E peut être écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{S}$, donc $\mathcal{S}$ est une famille génératrice de E.
Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{K}^p$, on suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_ie_i=0_E$. Comme $0_E=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}0e_i$, l'unicité de la décomposition donne $x_1=x_2=\ldots=x_p=0$, donc $\mathcal{S}$ est une famille libre.

— On suppose que $\mathcal{S}$ est une famille libre et génératrice de E. Soit $x\in E$. Comme $\mathcal{S}$ est génératrice, x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$. Et comme $\mathcal{S}$ est libre, cette décomposition en combinaison linéaire est unique. Donc $\mathcal{S}$ est une base de E.

□

Exercice 17. Dans $\mathbb{K}^n$, on pose $e_1=(1,0,\ldots,0)$, …, $e_k=(0,\ldots,\underbrace{1}_{k\text{ème position}},\ldots,0)$, … , $e_n=(0,\ldots,0,1)$.
Montrer que $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$.
Solution :

— Soit $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. On a alors $x=\sum_{k=1}^{n}x_ie_i$. Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $e_i\in\mathbb{K}^n$. La famille $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est donc génératrice de $\mathbb{K}^n$.

— Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_ie_i=0_{\mathbb{K}^n}$. Alors $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)$, et par identification des coefficients les α_i sont tous nuls. La famille $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est donc libre.

La famille est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Plusieurs ensembles usuels ont des bases « naturelles », appelées **bases canoniques** :

Espace vectoriel	Base canonique associée
$\mathbb{K}^n$	$((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1))$
$\mathbb{K}_n[X]$	$(1,X,X^2,\ldots,X^n)$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

On rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui placé à la i-ème ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

Exercice 18. Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

Solution :

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles :
   - La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée, donc appartient à E.
   - Soit u et v deux suites de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

     $$(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) = (\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n.$$

     Donc $\lambda u + v \in E$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. Donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. - Soit $u \in E$, c'est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique $q^2 = q + 1$, dont les solutions sont $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'après le cours sur les suites réelles, il existe donc deux réels α et β tels que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$
     Or $\forall n \in N$, $q_1^n + q_1^{n+1} = q_1^n(1 + q_1) = q_1^n q_1^2 = q_1^{n+2}$ (car q_1 est solution de l'équation caractéristique, donc $q_1^2 = q_1 + 1$). Donc $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
     On montre de même que $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Donc $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille génératrice de E.
   - Soit λ et μ deux réels, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0$. On trouve en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$ que $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$. Donc $\lambda = -\mu$ et $\mu(q_2 - q_1) = 0$. Cela donne $\lambda = \mu = 0$. Donc $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de E.

   Donc $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de E.

4 Somme de sous-espaces vectoriels

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble des éléments de E s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme des sous-espaces vectoriels** F et G. On note $F + G = \{x + y | (x, y) \in F \times G\}$.

Démonstration. Montrons qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de E :

- $0_E \in F \cap G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
- Soit $(u, v) \in (F + G)^2$ et λ un scalaire. Alors $\exists(x_u, y_u) \in F \times G$ tels que $u = x_u + y_u$ et $\exists(x_v, y_v) \in F \times G$ tels que $v = x_v + y_v$. Donc

  $$\lambda u + v = \lambda(x_u + y_u) + (x_v + y_v) = (\lambda x_u + x_v) + (\lambda y_u + y_v).$$

  Or $\lambda x_u + x_v \in F$ et $\lambda y_u + y_v \in G$ puisque F et G sont stables par combinaison linéaire. Donc $\lambda u + v \in F + G$.

Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition 4.2 (Somme d'espaces vectoriels engendrés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ deux familles finies d'éléments de E. On note $\mathcal{S}$ la famille qui juxtapose les vecteurs de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Alors :
$$\mathrm{Vect}(\mathcal{S}_1) + \mathrm{Vect}(\mathcal{S}_2) = \mathrm{Vect}(\mathcal{S}).$$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition. □

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on obtient donc une famille génératrice de $F+G$ en juxtaposant des familles génératrices de F et de G.

Exercice 19. On se place dans $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\mathbb{R}_1[X] + \mathrm{Vect}(X^2)$?
Solution : $\mathbb{R}_1[X] + \mathrm{Vect}(X^2) = \mathrm{Vect}(1, X) + \mathrm{Vect}(X^2) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Définition 4.3 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est une **somme directe** lorsque tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x + y$, avec $(x, y) \in F \times G$. La somme est alors notée $F \oplus G$.

Remarque. La définition de $F+G$ donne l'existence de cette décomposition, il suffit donc de montrer l'unicité pour conclure que la somme est directe.

Proposition 4.4 (Caractérisation des sommes directes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est une somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. On procède en deux temps :
- Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $u \in F+G$, supposons qu'on puisse écrire $u = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, avec $(x_1, y_1) \in F \times G$ et $(x_2, y_2) \in F \times G$. Alors :

$$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in F} = \underbrace{y_1 - y_2}_{\in G}.$$

  Donc $x_1 - x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. De même, $y_1 = y_2$. La décomposition de u est donc unique. Donc $F+G$ est une somme directe.
- Réciproquement, supposons que $F+G$ est une somme directe. Soit $u \in F \cap G$, on peut le décomposer comme $u = u + 0$ et comme $u = 0 + u$. L'unicité de la décomposition donne $u = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

□

Remarque. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a toujours $\{0_E\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ pour montrer qu'une somme est directe.

Exercice 20. Montrer que la somme $\mathbb{R}_1[X] + \mathrm{Vect}(X^2)$ est directe.
Solution : Soit $P(X) \in \mathbb{R}_1[X] \cap \mathrm{Vect}(X^2)$. Alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(X) = aX + b$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda X^2$. Donc $aX + b = \lambda X^2$, et par identification des coefficients des polynômes $a = b = \lambda = 0$. Donc $P(X) = 0$. On en déduit que $\mathbb{R}_1[X] \cap \mathrm{Vect}(X^2) = \{0\}$, c'est-à-dire que la somme est directe.
Remarque : avec l'exercice précédent, on a donc montré que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2)$.

4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 4.5 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

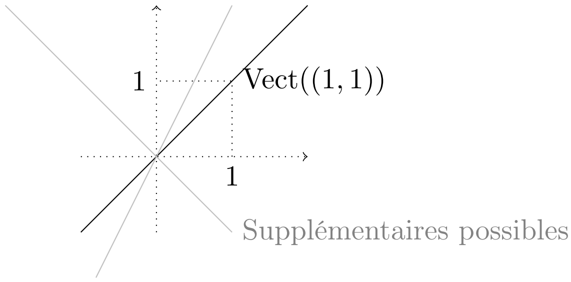
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Remarque. Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

Remarque. Des méthodes pratiques de construction de supplémentaire seront étudiées dans un prochain chapitre.

Exemple. $\mathrm{Vect}(X^2)$ et $\mathrm{Vect}(X^2+1)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
(on a montré $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2)$ dans l'exemple précédent, l'égalité $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2+1)$ s'établit de la même manière).

Exemple. Les supplémentaires d'une droite du plan passant par 0 sont toute autre droite du plan passant par 0. Par exemple, les supplémentaires de $\mathrm{Vect}((1,0))$ dans $\mathbb{R}^2$ sont les $\mathrm{Vect}((a,b))$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.



Exemple. Les supplémentaires d'un plan P de $\mathbb{R}^3$ passant par 0 sont toute droite du plan passant par 0 et non incluse dans le plan P.

Exercice 21. Soit n un entier naturel non nul, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Solution :

— La matrice nulle est symétrique. De plus, soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top = \lambda A + B$, donc $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On montre de même que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Montrons par analyse-synthèse que toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  — Analyse : on suppose qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = B + C$. Alors :

$$A^\top = B^\top + C^\top = B - C.$$

  Sommer les deux relations donne $A + A^\top = 2B$, et donc $B = \frac{A+A^\top}{2}$. On en déduit ensuite $C = \frac{A-A^\top}{2}$.

  — Synthèse : on pose $B = \frac{A+A^\top}{2}$ et $C = \frac{A-A^\top}{2}$. Il est immédiat que $A = B + C$. De plus,

$$B^\top = \frac{A^\top + A}{2} = B \text{ et } C^\top = \frac{A^\top - A}{2} = -C,$$

  donc B est symétrique et C antisymétrique. Ces valeurs de B et C sont donc solution du problème.

  Il existe donc bien une unique décomposition de A comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.