Probabilités

Cours de É. Bouchet – PCSI

25 mars 2024

Table des matières

1 Expériences aléatoires

1.1 Contexte et vocabulaire probabiliste

Définition 1.1 (Expérience aléatoire, univers)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est noté Ω et est appelé **l'univers** de l'expérience.

Définition 1.2 (Événement)

Soit Ω un univers fini. On appelle **événement** tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque. Dans le cas d'un univers fini (seul cas envisagé en PCSI), un événement est un sous-ensemble de Ω.

Exercice 1. On lance un dé à six faces. On note A l'événement "obtenir un 6" et B l'événement "obtenir un nombre pair". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A et B.
<u>Solution :</u> $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = [\![1,6]\!]$, $A = \{6\}$ et $B = \{2,4,6\}$.

Exercice 2. On lance deux dés : un rouge et un noir. On note A l'événement "obtenir un double 6", B l'événement "obtenir un double" et C l'événement "obtenir au moins un 6". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A, B et C.
<u>Solution :</u> On choisit arbitrairement de donner le résultat du dé rouge en premier.
$\Omega = [\![1,6]\!]^2$, $A = \{(6,6)\}$, $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} = \bigcup_{i=1}^{6}\{(i,i)\} = \{(i,i) | i \in [\![1,6]\!]\}$
et $C = ([\![1,6]\!] \times \{6\}) \cup (\{6\} \times [\![1,6]\!]) = \Omega \setminus ([\![1,5]\!]^2)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce n fois, avec la convention que 1 représente pile et 0 face. On note A l'événement "n'obtenir que des piles", B l'événement "obtenir un pile au second lancer" et C l'événement "obtenir au moins un pile". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A, B et C.
<u>Solution :</u> $\Omega = \{0,1\}^n$, $A = \{1\}^n = \{(1,\dots,1)\}$, $B = \{0,1\} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-2}$
et $C = \bigcup_{j=1}^{n}(\{0,1\}^{j-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-j}) = \Omega \setminus \{0\}^n$.

Exercice 4. Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N. On note A l'événement "ne jamais obtenir la boule N" et B l'événement "toujours tirer le même numéro". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A et B.
<u>Solution :</u> $\Omega = [\![1,N]\!]^n$, $A = [\![1,N-1]\!]^n$ et $B = \bigcup_{i=1}^{N}\{i\}^n$.

Remarque. Le vocabulaire des événements est lié à celui des ensembles :

Vocabulaire des événements	Vocabulaire des ensembles	Notation
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$, avec $\omega \in \Omega$
événement contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
événement certain	ensemble Ω	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
les événements A et B sont réalisés	on est dans l'intersection de A et B	$A \cap B$
les événements A ou B sont réalisés	on est dans la réunion de A et B	$A \cup B$
les événements A et B sont **incompatibles**	les ensembles A et B sont disjoints	$A \cap B = \emptyset$
l'événement A implique l'événement B	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B	$A \subset B$

Exemple. Soit Ω un univers fini, B un événement et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements.

1. $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_i est réalisé (A_1 ou A_2 ou ...ou A_n).
2. $\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement : les événements A_i sont tous réalisés (A_1 et A_2 et ...et A_n).
3. $\overline{\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement : aucun des événements A_i n'est réalisé.
4. $\overline{\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_i n'est pas réalisé.
5. $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B\cap A_i) = B\bigcap\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right)$ correspond à l'événement : l'événement B est réalisé, ainsi qu'au moins un des événements A_i.
6. $\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (B\cup A_i) = B\bigcup\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right)$ correspond à l'événement : l'événement B est réalisé ou tous les événements A_i sont réalisés.

1.2 Système complet d'événements

Définition 1.3 (Système complet d'événements)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathcal{P}(\Omega)^n$. On dit que $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque :

— les événements A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j \Longrightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$.

— les événements A_i recouvrent l'univers : $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i=\Omega$.

Remarque. Cela correspond (en vocabulaire ensembliste) à la notion de partition d'un ensemble.

Remarque. De manière évidente,

— $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements de Ω.

— Si $A\subset\Omega$ alors $\left(A,\overline{A}\right)$ est un système complet d'événements de Ω.

Exemple. Soit $\Omega=[\![1,6]\!]$ l'univers associé à un lancer de dé.

$(\{1,3,5\},\{2,4,6\})$ est un système complet d'événements de Ω.

$(\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\})$ est un système complet d'événements de Ω.

$(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\})$ est un système complet d'événements de Ω.

$(\{1\},\{2,3,4\},\{5,6\})$ est un système complet d'événements de Ω.

Proposition 1.4 (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements. Tout événement B peut se décomposer comme $B=\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]}(B\cap A_i)$, où les événements $B\cap A_i$ sont incompatibles deux à deux.

Démonstration. On a par la définition d'un système complet d'événements et par distributivité :

$$B=B\cap\Omega=B\cap\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right)=\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]}(B\cap A_i).$$

De plus, soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $i\neq j$, $(B\cap A_i)\cap(B\cap A_i)=B\cap(A_i\cap A_j)=B\cap\emptyset=\emptyset$ par incompatibilité des A_i. D'où le résultat. $\square$

Remarque. Ce résultat est pratique quand on cherche à faire apparaître des disjonctions de cas.

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Définition et premier exemple

Définition 2.1 (Probabilité)

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** toute application P définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$, vérifiant $P(\Omega)=1$ et telle que si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Remarque. On montre ensuite par récurrence que pour toute famille d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

En particulier, si $(A_1,\ldots,A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P(\Omega)=1$.

Définition 2.2 (Espace probabilisé)

Si P est une probabilité, on dit que (Ω,P) est un **espace probabilisé**.

Définition 2.3 (Probabilité uniforme)

Soit Ω un univers fini. L'application P qui à un événement A associe $\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ est une probabilité, appelée **probabilité uniforme**.

Démonstration. L'application P est bien définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$, puisque si $A\subset\Omega$, $0\leqslant \mathrm{Card}(A)\leqslant \mathrm{Card}(\Omega)$. Il est aussi immédiat que $P(\Omega)=\frac{\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=1$. Enfin, si A et B sont deux événements incompatibles,

$$P(A\cup B)=\frac{\mathrm{Card}(A\cup B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\frac{\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=P(A)+P(B).$$

La fonction P est donc bien une probabilité. □

Remarque. La relation $P(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ est rencontrée au lycée sous la forme $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$. On parle aussi de situation d'équiprobabilité (car tous les événements élémentaires ont la même probabilité).

Exemple. On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir le numéro $i\in[\![1,6]\!]$ est alors $\dfrac{\mathrm{Card}(\{i\})}{\mathrm{Card}([\![1,6]\!])}=\dfrac{1}{6}$.

Exemple. Une urne contient $n\in\mathbb{N}^*$ boules identiques numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro $i\in[\![1,n]\!]$ est alors $\dfrac{\mathrm{Card}(\{i\})}{\mathrm{Card}([\![1,n]\!])}=\dfrac{1}{n}$.

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?
Solution : On note A l'événement "obtenir une somme égale à 6". Alors, par équiprobabilité,

$$P(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\frac{\mathrm{Card}(\{(1,5),(5,1),(3,3),(2,4),(4,2)\})}{\mathrm{Card}([\![1,6]\!]^2)}=\frac{5}{36}.$$

2.2 Détermination d'une probabilité

Définition 2.4 (Distribution de probabilités)

Soit E un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilités** sur E toute famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par E et dont la somme est égale à 1.

Exemple. Soit $E = [\![1, n]\!]$, on pose $\forall i \in E,\ p_i = \frac{1}{n}$. Alors $(p_i)_{i \in E}$ forme une distribution de probabilités.

Proposition 2.5 (Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires)

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω.
Il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse :

- Supposons que P est une telle probabilité. Soit A un événement de Ω, on obtient en se ramenant à une réunion d'événements deux à deux incompatibles :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

- Réciproquement, soit P l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$. Alors :
  - Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0,1]$ car $0 \leqslant \sum_{\omega\in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
  - $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
  - Soit $\omega \in \Omega$, on obtient bien $P(\{\omega\}) = p_\omega$.
  - Soit A et B deux événements incompatibles, $P(A\cup B) = \sum_{\omega\in A\cup B} p_\omega = \sum_{\omega\in A} p_\omega + \sum_{\omega\in B} p_\omega = P(A) + P(B)$.

  Donc P convient.

Donc il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que $\forall \omega\in\Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$. □

Remarque. On a au passage montré que pour tout événement A, $P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Exercice 6. On lance un dé pipé à 6 faces qui donne 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et chacune des autres faces avec probabilité $\frac{3}{20}$. Calculer la probabilité d'obtenir une face impaire.
<u>Solution :</u> Pour modéliser ce lancer, on se place dans l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On utilise la probabilité P définie par la distribution de probabilités $(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20})$ sur Ω (les valeurs se somment bien à 1).
Soit I l'événement "on obtient une face impaire", on trouve alors :

$$P(I) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

2.3 Propriétés

Proposition 2.6 (Lien avec les opérations sur les événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Alors :

- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Démonstration.

- Comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, l'additivité donne $P(A) + P(\overline{A}) = P(A\cup\overline{A}) = P(\Omega) = 1$.
- Par le point précédent, $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
- Comme $A \subset B$, $P(B) = P(A\cup(B\setminus A)) = P(A) + P(B\setminus A)$, où on peut utiliser l'additivité car $A\cap(B\setminus A) = \emptyset$. D'où le résultat.
- $P(A\cup B) = P(A\cup(B\setminus A)) = P(A) + P(B\setminus A)$, par additivité, car $A\cap(B\setminus A) = \emptyset$. Donc $P(A\cup B) = P(A) + P(B\setminus(A\cap B)) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ par le point précédent, car $A\cap B \subset B$.

$\square$

Proposition 2.7 (Croissance de P)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. P est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

Démonstration. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, on suppose que $A \subset B$. On a alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Comme de plus P est positive, on trouve $P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \geqslant P(A)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exercice 7. On effectue une succession de pile ou face. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n l'événement "il y a au moins un pile dans les n premiers lancers" et $u_n = P(A_n)$. Montrer que la suite u est convergente.
Solution : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \subset A_{n+1}$. En effet, s'il y a au moins un pile dans les n premiers lancers, il y en aura aussi au moins un dans les $n+1$ premiers lancers. Donc par croissance de la probabilité, $u_n = P(A_n) \leqslant P(A_{n+1}) = u_{n+1}$. Ce qui signifie que la suite u est croissante.
Or u est également majorée par 1 (c'est une suite de probabilités). Elle est donc croissante et majorée : c'est une suite convergente.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

Définition 3.1 (Probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$. On définit un nouvel espace probabilisé (Ω, P_B) en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On appelle P_B la **probabilité conditionnelle** relative à B et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Remarque. On utilise parfois la notation $P(A|B)$ à la place de $P_B(A)$.

Démonstration. Il faut montrer que P_B est bien une probabilité :

- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, par croissance de la probabilité, $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$, donc en divisant par $P(B) > 0$, on trouve bien $0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$.
- $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- Soit A_1 et A_2 deux événements incompatibles. Alors $A_1 \cap B$ et $A_2 \cap B$ sont incompatibles, donc :

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2).$$

Donc P_B est bien une probabilité. $\square$

Remarque. Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. Alors $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$. Le conditionnement donne donc une méthode pour calculer certaines probabilités d'intersections.

Remarque. Quand $P(B) = 0$, on ne sait pas définir $P_B(A)$. On décide par convention que $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ reste quand même vraie. Cette convention se justifie car si $P(B) = 0$, la croissance de P donne les inégalités $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 8. Un sac contient cinq boules : trois noires et deux blanches. On y tire deux boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité qu'elles soient noires toutes les deux ?
Solution : On pose N_1 l'événement « la première boule est noire » et N_2 l'événement « la deuxième boule est noire ». Alors par équiprobabilité des tirages,

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 3.2 (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = 0$, comme $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subset A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}$, la croissance de P donne directement $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = 0$ et on a $0 = 0$.
Sinon $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, ce qui garantit par croissance de P que tous les conditionnements sont bien définis. Un produit télescopique donne alors :

$$P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = P(A_1)\prod_{k=2}^{n} P_{A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}}(A_k) = P(A_1)\prod_{k=2}^{n}\frac{P(A_1\cap\ldots\cap A_k)}{P(A_1\cap\ldots\cap A_{k-1})} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

□

Exercice 9. On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on pose $B_i =$"le i-ème tirage donne une boule blanche" et $R_i =$"le i-ème tirage donne une boule rouge". Calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.
Solution : La formule des probabilités composées donne :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(R_3) = \frac{7}{13}\times\frac{6}{12}\times\frac{6}{11} = \frac{21}{143}.$$

3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 3.3 (Formule des probabilités totales)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Démonstration. On décompose l'événement B sur le système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$: $B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$ et les $(B \cap A_i)$ sont incompatibles deux à deux. L'additivité de la probabilité donne alors : $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.
Par définition de la probabilité conditionnelle (et la convention établie dans le cas d'une probabilité nulle), pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(B \cap A_i) = P(A_i)P_{A_i}(B)$. En remplaçant cette expression dans la formule précédente, on obtient la deuxième égalité. □

Remarque. En particulier soit A et B deux événements. Comme $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(A)\,P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B).$$

Exercice 10. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?
Solution : On note A l'événement "piocher une boule noire" et $\forall i \in [\![1,3]\!]$, B_i l'événement "piocher dans l'urne U_i". (B_1, B_2, B_3) forme un système complet d'événements, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{6} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{37}{60}.$$

On peut faire le dessin avec un arbre pour illustrer, mais attention : ça n'est pas une preuve !

3.4 Formule de Bayes

Proposition 3.4 (Formule de Bayes)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit A, B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P_A(B)}{P(A)\, P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}(B)}.$$

Démonstration. La définition du conditionnement donne $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$
On applique ensuite la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A, \overline{A})$:

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B),$$

ce qui donne la deuxième égalité. □

Exercice 11. Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur 100 000 :
- lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
- lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?
Solution : On note M l'événement "la personne est malade" et T l'événement "le test est positif". L'énoncé nous donne :

$$P_M(T) = 0,998 \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,996 \quad P(M) = \frac{1}{100000},$$

et on cherche à calculer $P_T(M)$. On commence par calculer $P(T)$, pour vérifier qu'il est non nul. Pour cela, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(M, \overline{M})$:

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) = 0,00001 \times 0,998 + 0,99999 \times (1 - 0,996) = 0,00400994 \neq 0.$$

On obtient alors par la formule de Bayes :

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,00001 \times 0,998}{0,00400994} = \frac{0,00000998}{0,00400994} = 0,0025.$$

Donc même si le test est positif, il y a très peu de chances que la personne soit malade $(0,25\%)$.
Ce résultat contre-intuitif est dû au nombre très faible de personnes malades dans la population.

4 Indépendance d'événements

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Remarque. ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :
- L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité. A et B sont indépendants pour P lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité. A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$ et on a alors (mais c'est une conséquence) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 12. On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :
- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité $\frac{1}{3}$).

On note A ="obtenir pile au premier lancer de la pièce", B ="obtenir pile au second lancer de la pièce" et C ="le lancer du dé donne le chiffre 1". Étudier l'indépendance de A et B pour P et P_C.
Solution : Si C est réalisé, on sait que c'est la pièce équilibrée qui est utilisée. On a donc par équiprobabilité :

$$P_C(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P_C(A)P_C(B),$$

donc il y a indépendance de A et B sous P_C.
Par ailleurs, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(C, \overline{C})$, on obtient :

$$P(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A)P_{\overline{C}\cap A}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{29}{216}$$

et

$$P(B) = P(A) = P(C)P_C(A) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{6^2}.$$

Donc $P(A)P(B) = \frac{13^2}{6^4} \neq \frac{29}{216}$. Donc A et B ne sont pas indépendants sous P.

Proposition 4.2 (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tels que $P(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(B) = P_A(B)$.

Démonstration. Cela découle directement des équivalences suivantes, dues à la définition de probabilité conditionnelle :

$$P(B) = P_A(B) \Longleftrightarrow P(B)P(A) = P_A(B)P(A) \Longleftrightarrow P(B)P(A) = P(A \cap B).$$

□

Proposition 4.3 (Complémentaire et indépendance)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- A et B sont indépendants.
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration. On va montrer que (A et B indépendants) implique (A et $\overline{B}$ indépendant), toutes les équivalences en découlent ensuite directement. Supposons donc que A et B sont indépendants. Alors

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}),$$

où la dernière égalité se montre en appliquant la formule des probabilités totales à A et au système complet d'événements $(B, \overline{B})$ ou en remarquant que $A \cap B \subset A$ et $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B))$.
Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. D'où le résultat. □

Remarque. Ce résultat se généralisera sans difficulté au cas de n événements.

4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition 4.4 (Indépendance d'une famille d'événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une **famille d'événements (mutuellement) indépendants** si pour tout $J \subset [\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$.

Remarque. ATTENTION : vérifier $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$ n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

Exercice 13. On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui vérifient $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.
<u>Solution :</u> Il suffit de choisir un événement impossible pour A, et $B = C$. On pose par exemple $A =$"ne tirer ni pile ni face", $B = C =$"tirer pile", et on a :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 = 0 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

Il n'y a pourtant pas indépendance mutuelle car B et C ne sont pas indépendants :

$$P(B \cap C) = P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(B)P(C).$$

Exercice 14. On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.
<u>Solution :</u> On pose $A =$ "le premier lancer donne pile", $B =$ "le deuxième lancer donne pile", et $C =$ "les deux lancers donnent le même résultat".
Pour $i = 1$ ou 2, on pose de plus $F_i =$ "le i-ème lancer donne face. Alors $P(A) = P(\overline{F_1}) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(\overline{F_2}) = \frac{1}{2}$ et $P(C) = P((F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})) = \frac{1}{2}$ (par dénombrement direct ou en remarquant que les événements de l'union sont incompatibles et les lancers sont indépendants). On a de plus :

$P(A \cap B) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, donc A et B sont indépendants.

$P(A \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, donc A et C sont indépendants.

$P(B \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$, donc B et C sont indépendants.

Par contre, $P(A \cap B \cap C) = P(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$. Donc il ne s'agit pas d'une famille d'événements mutuellement indépendants.