

# Intégration

Cours de É. Bouchet – PCSI

12 avril 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégrale d'une fonction</b>	<b>2</b>
1.1	Cas d'une fonction en escalier . . . . .	2
1.2	Cas d'une fonction continue sur un segment . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Propriétés des intégrales de fonctions continues</b>	<b>3</b>
2.1	Premières propriétés . . . . .	3
2.2	Intégrales et relation d'ordre . . . . .	4
2.3	Passage à la limite et développement asymptotique . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Sommes de Riemann</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Lien entre intégrale et primitive</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Inégalité de Taylor-Lagrange</b>	<b>9</b>
5.1	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	9
5.2	Inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Extension au cas des fonctions complexes</b>	<b>12</b>

# 1 Intégrale d'une fonction

## 1.1 Cas d'une fonction en escalier

### Définition 1.1 (Subdivision)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ . Une **subdivision** de  $[a, b]$  est une suite finie  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  telle que :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b.$$

### Définition 1.2 (Pas d'une subdivision)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . On dit que  $\sigma$  est une **subdivision à pas constant** lorsqu'il existe  $h \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k - a_{k-1} = h$ .

La valeur de  $h$  est appelée **pas de la subdivision**.

**Exemple.**  $(0, 2, 6)$  est une subdivision de  $[0, 6]$  (à pas non constant).

$(0, 2, 4, 6)$  est une subdivision de  $[0, 6]$  à pas constant, de pas 2.

### Définition 1.3 (Fonction en escalier)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $\varphi$  est une **fonction en escalier** sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que  $\varphi$  est constante sur chaque intervalle  $]a_{k-1}, a_k[$ .

**Remarque.** Autrement dit,  $\varphi$  est une fonction en escalier s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in ]a_{k-1}, a_k[, \varphi(x) = \lambda_k$ .

**Exemple.** La fonction partie entière est une fonction en escalier sur n'importe quel intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

### Définition 1.4 (Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$ . En reprenant les notations de la remarque précédente, on définit l'**intégrale sur**  $[a, b]$  de  $\varphi$  par : 
$$\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k - a_{k-1}).$$

**Remarque.** Dans cette formule, la quantité  $\lambda_k (a_k - a_{k-1})$  est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur  $\lambda_k$  (faire un dessin). Cette aire est comptée positivement si  $\lambda_k \geq 0$ , et négativement sinon. Donc  $\int_a^b \varphi(t) dt$  correspond à l'aire algébrique de la région délimitée par le graphe de  $\varphi$  et l'axe des abscisses.

## 1.2 Cas d'une fonction continue sur un segment

### Définition 1.5 (Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ ,  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$  et  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . On note  $f_\sigma^+$  et  $f_\sigma^-$  les deux fonctions en escalier définies par :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in [a_{k-1}, a_k],$

$$f_\sigma^+(x) = \max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \quad \text{et} \quad f_\sigma^-(x) = \min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t).$$

Faire un dessin illustratif.

**Remarque.** D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les nombres  $\max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$  et  $\min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$  sont bien définis.

**Définition 1.6** (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les subdivisions de  $[a, b]$ . En réutilisant les notations de la définition précédente, on a :

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}} \left( \int_a^b f_{\sigma}^{+}(t) dt \right) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \left( \int_a^b f_{\sigma}^{-}(t) dt \right).$$

Cette valeur commune est appelée **intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$** , et est notée  $\int_a^b f(t) dt$ ,  $\int_a^b f$  ou  $\int_{[a,b]} f$ .

*Démonstration.* L'existence et l'égalité des bornes inférieure et supérieure sont admises. □

**Remarque.** Dans le cas d'une fonction en escalier, cette définition coïncide avec celle donnée précédemment. Cela donne par exemple que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b \lambda dt = (b - a)\lambda$ .

**Remarque.** Cette définition permet de conserver la notion d'intégrale définie comme aire sous la courbe.

**Définition 1.7** (Intégrale aux bornes interverties)

Soit  $I$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a < b$ . On définit :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

**Remarque.** Dans ce cas, l'aire est alors comptée négativement.

**Définition 1.8** (Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ . On définit la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  par la valeur  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ .

**Remarque.** Cette notion généralise celle de moyenne sur un nombre fini de réels.

## 2 Propriétés des intégrales de fonctions continues

### 2.1 Premières propriétés

**Proposition 2.1** (Linéarité)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

*Démonstration.* Par construction,  $\int_a^b f$  est la limite d'intégrales de fonctions en escalier. On commence par supposer que  $a \leq b$ .

— Montrons que la propriété est vraie pour des fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\psi$ . Soit  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  une subdivision adaptée aux deux fonctions (qui s'obtient par exemple en mettant en commun les points d'une subdivision adaptée à  $\varphi$  et d'une subdivision adaptée à  $\psi$ ). Alors :

$$\int_a^b (\lambda \varphi + \mu \psi) = \sum_{k=1}^n (\lambda \varphi + \mu \psi) \left( \frac{a_{k-1} + a_k}{2} \right) (a_k - a_{k-1})$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^n \varphi \left( \frac{a_{k-1} + a_k}{2} \right) (a_k - a_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^n \psi \left( \frac{a_{k-1} + a_k}{2} \right) (a_k - a_{k-1})$$

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi.$$

— Par construction, il existe une suite de subdivisions  $(\sigma_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de  $[a, b]$  et des fonctions en escalier  $f_{\sigma_p}, g_{\sigma_p}$  telles que  $\int_a^b f = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{\sigma_p}$  et  $\int_a^b g = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b g_{\sigma_p}$ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \lambda \int_a^b f_{\sigma_p} + \mu \int_a^b g_{\sigma_p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda f_{\sigma_p} + \mu g_{\sigma_p}) \\ \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g &= \int_a^b (\lambda f + \mu g) \end{aligned}$$

— Si  $b < a$ , on montre que  $\int_b^a (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_b^a f + \mu \int_b^a g$  puis on multiplie par  $-1$  :  $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ . On a donc bien montré le résultat annoncé.  $\square$

### Proposition 2.2 (Relation de Chasles)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et  $(a, b, c) \in I^3$ . Alors  $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$ .

*Démonstration.* La stratégie est la même que pour la linéarité : on montre le résultat pour les fonctions en escalier, puis on passe à la limite et on étudie le cas où les bornes de l'intégrale sont retournées.  $\square$

**Remarque.** La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre  $a, b$  et  $c$ .

### Proposition 2.3 (Généralisation de la relation de Chasles)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  une suite finie de réels de  $I$ . Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$$

*Démonstration.* Ce résultat se montre directement par récurrence à partir de la proposition précédente.  $\square$

## 2.2 Intégrales et relation d'ordre

### Proposition 2.4 (Positivité)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a \leq b$ . Si  $f$  est positive sur  $[a, b]$  alors  $0 \leq \int_a^b f(t)dt$ .

*Démonstration.* On le montre pour les fonctions en escalier avant de passer à la limite.

— Soit  $\varphi$  une fonction en escalier positive, la définition  $\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k - a_{k-1})$  fait intervenir une somme où tous les termes sont positifs, donc l'intégrale est positive.

— Par construction, il existe une suite de subdivisions  $(\sigma_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de  $[a, b]$  telle que  $\int_a^b f = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_{\sigma_p}^+$ .  
 Or  $\varphi_{\sigma_p}^+$  est positive, car  $\varphi_{\sigma_p}^+ \geq f \geq 0$ , donc d'après le point précédent, son intégrale est aussi positive. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a  $\int_a^b f \geq 0$ . □

**Proposition 2.5** (Croissance de l'intégration)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a \leq b$ . Si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$  alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ .

*Démonstration.* La fonction  $g - f$  est continue sur  $I$  et est positive. Puisque  $a \leq b$ , la positivité de l'intégrale donne  $0 \leq \int_a^b (g - f)(t)dt = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt$ . On conclut alors par linéarité de l'intégrale. □

**Exercice 1.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ .

*Solution :* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f : x \rightarrow \frac{x^n}{x+1}$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc l'intégrale existe. Le numérateur dépend de  $n$ , on va donc borner le dénominateur qui n'en dépend pas :  $\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$ , donc par produit avec  $x^n \geq 0$  on obtient  $0 \leq f(x) \leq x^n$ . Comme  $0 \leq 1$ , la croissance de l'intégrale donne alors :

$$0 = \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , le théorème d'encadrement donne alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx = 0$ .

**Proposition 2.6** (Stricte positivité)

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a < b$ . Si  $f$  est non nulle, alors  $\int_a^b f(t)dt > 0$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) > 0$ . Puisque  $\frac{f(x_0)}{2} < f(x_0)$ , la continuité de  $f$  donne l'existence d'un réel  $\eta > 0$  tel que  $\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par :  $\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \varphi(x) = \frac{f(x_0)}{2}$  et  $\forall x \notin ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \varphi(x) = 0$ . Par construction,  $\varphi$  est une fonction en escalier et  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq \varphi(x)$ . Comme  $a \leq b$ , la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b \varphi(t)dt = 2\eta \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

□

**Remarque.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et  $(f, g) \in (C^0([a, b]))^2$ . On suppose que  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  et que  $\exists x \in [a, b]$  tel que  $f(x) < g(x)$ . Le résultat précédent appliqué à  $g - f$  donne alors un résultat de croissance stricte :  $\int_a^b f < \int_a^b g$ .

**Proposition 2.7** (Cas de l'intégrale nulle)

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a < b$ . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \implies \forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

*Démonstration.* Se déduit du résultat précédent par contraposée. □

**Proposition 2.8** (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a \leq b$ . Alors  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .

*Démonstration.* On sait que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ . On a donc par croissance de l'intégrale (puisque  $a \leq b$ ) :

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

ce qui donne exactement  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ . □

### 2.3 Passage à la limite et développement asymptotique

Il est interdit de passer une limite de l'extérieur à l'intérieur d'une intégrale : si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$ , on peut avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$ , même si on sait déjà que ces limites existent.

Pour calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ , il faut procéder par calcul direct de l'intégrale ou par encadrement (si le calcul direct est impossible).

**Exercice 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(t) = n$  si  $t \in ]0, \frac{1}{n}]$  et  $f_n(t) = 0$  si  $t > \frac{1}{n}$ .

1. Calculer  $\int_0^1 f_n(t) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Que peut-on en déduire concernant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$  ?

Solution : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est en escalier sur  $[0, 1]$  donc l'intégrale existe. De plus,

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n dt + 0 = [nt]_0^{\frac{1}{n}} = 1.$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$  existe et vaut 1.

2. Soit  $t \in [0, 1]$ . Justifier l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$  avant de la calculer. En déduire la valeur de  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$ .

Solution :  $f_n(0)$  vaut toujours 0. Soit  $t \in ]0, 1]$ ,  $\forall n > \frac{1}{t}$ ,  $f_n(t) = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$  existe et vaut 0. On en déduit :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

De même, on ne peut pas prendre directement l'équivalent d'une intégrale. Pour obtenir un développement asymptotique d'une expression impliquant une intégrale, on passe le plus souvent par des encadrements.

**Exercice 3.** Montrer que  $\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x (e-1) \ln(x)$ .

Solution :  $t \mapsto e^t \ln(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc l'intégrale existe.

Soit  $x > 0$  et  $t \in [x, x+1]$ . On a  $\ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x+1)$ . Comme  $x \leq x+1$ , la croissance de l'intégrale donne alors :

$$\ln(x) \int_x^{x+1} e^t dt = \int_x^{x+1} e^t \ln(x) dt \leq \int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \leq \int_x^{x+1} e^t \ln(x+1) dt = \ln(x+1) \int_x^{x+1} e^t dt.$$

Un calcul permet donc d'obtenir :

$$\ln(x) e^x (e-1) = \ln(x) (e^{x+1} - e^x) \leq \int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \leq \ln(x+1) (e^{x+1} - e^x) = \ln(x+1) e^x (e-1).$$

Si  $x > 1$ ,  $\ln(x)e^x(e-1) > 0$ , ce qui donne par quotient :

$$1 \leq \frac{\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt}{\ln(x)e^x(e-1)} \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

On en déduit par théorème d'encadrement que  $\frac{\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt}{\ln(x)e^x(e-1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , et donc  $\int_x^{x+1} e^t \ln(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x(e-1) \ln(x)$ .

### 3 Sommes de Riemann

#### Définition 3.1 (Sommes de Riemann)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \leq b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On définit les suites  $(S_n)_{n \geq 1}$  et  $(T_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k),$$

où  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ . Ces suites sont appelées **sommes de Riemann** associées à la fonction  $f$ .

**Remarque.** En particulier, on trouve  $a_0 = a$  et  $a_n = b$ .

**Remarque.** C'est une méthode d'approximation de la valeur de l'intégrale, appelée méthode des rectangles. Faire le dessin illustratif.

#### Proposition 3.2 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \leq b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Les sommes de Riemann  $(S_n)$  et  $(T_n)$  convergent vers  $I = \int_a^b f(t) dt$ .

*Démonstration.* On effectue la preuve dans le cas particulier où  $f$  est lipschitzienne de rapport  $M > 0$  (cela couvre notamment le cas  $C^1$  grâce à l'inégalité des accroissements finis). On étudie le cas de la suite  $(S_n)$ , le raisonnement s'adapterait ensuite facilement pour  $(T_n)$ .

Soit  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |S_n - I| &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right| \quad \text{par relation de Chasles} \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right| \quad \text{car } a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) dt \right| \quad \text{par linéarité de la somme et de l'intégrale} \\ |S_n - I| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \quad \text{par inégalités triangulaires, avec } a_k \leq a_{k+1} \end{aligned}$$

Or  $f$  est  $M$ -lipschitzienne, donc  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$ ,  $|f(a_k) - f(t)| \leq M |a_k - t| = M(t - a_k)$ . Pour  $n \geq 1$ , on trouve alors par croissance de l'intégrale (car  $a_k \leq a_{k+1}$ ) et somme :

$$|S_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t - a_k) dt \right) = M \sum_{k=0}^{n-1} \left( \left[ \frac{(t - a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \right) = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2}.$$

D'où

$$|S_n - I| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}{2} = M \frac{n(b-a)^2}{2n^2} = M \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M \frac{(b-a)^2}{2n} = 0$ , donc par encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n - I| = 0$  et la suite  $(S_n)_n$  est convergente vers  $I$ .  $\square$

**Remarque.** Dans le cas où  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ , on a montré au passage une majoration de l'erreur commise par  $\frac{M(b-a)^2}{2n}$ .

Cette majoration n'est pas très bonne, puisque  $\frac{1}{n}$  converge lentement par 0. La méthode des trapèzes, qui consiste à adapter la méthode des rectangles en utilisant des trapèzes à la place des rectangles (l'approximation locale est affine au lieu de constante, faire un dessin pour illustrer) permettrait une erreur en  $O(\frac{1}{n^2})$ , ce qui est bien mieux.

**Remarque.** Si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , alors on a en particulier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

**Exercice 4.** Étudier la convergence de la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Solution : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ . Or  $x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc par convergence des sommes de Riemann,  $u$  converge vers l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ . Cette intégrale a déjà été calculée dans le chapitre de calcul de primitives. Donc la suite  $u$  converge vers  $\frac{\pi}{4}$ .

## 4 Lien entre intégrale et primitive

### Proposition 4.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in I$ , on définit la fonction  $F$  par :  $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Alors  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

*Démonstration.* Il est immédiat que  $F(a) = 0$ . Soit  $x \in I$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ . On pose  $u(h) = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|$ . Un retour à la définition de  $F$ , la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale donnent :

$$u(h) = \left| \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - hf(x) \right) \right| = \left| \frac{1}{h} \left( \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \right|.$$

Si  $h > 0$  (le raisonnement s'adapte au cas  $h < 0$  à l'aide de changements de signes), l'inégalité triangulaire donne :

$$u(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  est continue en  $x$ , donc il existe  $\eta > 0$  tel que  $\forall t \in [x - \eta, x + \eta], |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Donc si  $h \in [0, \eta]$ , on obtient par croissance de l'intégrale (puisque  $x \leq x + h$ ) :

$$u(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \times h \times \varepsilon = \varepsilon.$$

Cela prouve que  $u(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  et donc que  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$ . Donc  $F$  est dérivable en  $x$  et  $F'(x) = f(x)$ . Ce raisonnement étant valable pour tout  $x \in I$ , on a donc bien que  $F$  est dérivable et que  $F' = f$ .  $\square$

**Remarque.** Comme  $f$  est continue, on obtient de plus que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ .

**Remarque.** On en déduit comme au premier semestre que toute fonction continue sur  $I$  admet des primitives, que si  $F$  est une primitive de  $f$ ,  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$  et les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

**Exercice 5.** Étudier la dérivabilité de la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$ .

**Solution :** Soit  $F$  une primitive de  $t \mapsto e^{t^2}$  sur  $\mathbb{R}$  (qui existe, puisque la fonction est continue sur cet intervalle). Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt = F(x^2) - F(0).$$

$\varphi$  est donc dérivable par composée de fonctions dérivables et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) = 2xF'(x^2) = 2xe^{x^4}$ .

**Proposition 4.2** (Cas des fonctions paires, impaires ou périodiques)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est impaire, alors  $\forall x \in I$ ,  $\int_{-x}^x f = 0$ .
- Si  $f$  est paire, alors  $\forall x \in I$ ,  $\int_{-x}^x f = 2 \int_0^x f$ .
- Si  $f$  est périodique de période  $T > 0$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$ .

**Remarque.** Faire des dessins pour illustrer.

*Démonstration.* Comme  $f$  est continue sur  $I$ , il existe une primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ .

- Si  $f$  est impaire, on pose  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $x \rightarrow \int_{-x}^x f$ . Alors  $\forall x \in I$ ,  $g(x) = F(x) - F(-x)$ . La fonction  $g$  est donc dérivable sur  $I$ , et comme  $f$  est impaire,

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc  $g$  est constante sur  $I$ . Or  $g(0) = \int_0^0 f = 0$ . Donc  $g$  est la fonction nulle, d'où le résultat annoncé.

- Si  $f$  est paire, on procède de même en posant  $g : x \rightarrow \int_{-x}^x f - 2 \int_0^x f$ .
- Si  $f$  est périodique de période  $T$ , on procède de même en posant  $g : x \rightarrow \int_x^{x+T} f - \int_0^T f$ .

□

## 5 Inégalité de Taylor-Lagrange

### 5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Proposition 5.1** (Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre  $n$ ))

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur l'intervalle  $I$ . Pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Remarque.** Cette formule n'est pas exigible en première année, mais on en a besoin pour démontrer la suivante, qui elle le sera.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et  $(a, b) \in I^2$ . On pose :

$P(n) = \ll \text{si } f \in C^{n+1}(I), \text{ alors } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \gg$ .

- Pour  $n = 0$ , soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ , alors  $f'$  est continue, de primitive  $f$ , et on a :

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a),$$

d'où :  $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ . Donc  $P(0)$  est vraie.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $P(n)$  est vrai. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+2}$  sur  $I$ . Elle est donc aussi en particulier de classe  $C^{n+1}$  et on trouve en appliquant  $P(n)$  :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme  $f$  est de classe  $C^{n+2}$  sur  $I$ ,  $f^{(n+1)}$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ . Or  $t \rightarrow \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  est également de classe  $C^1$  sur  $I$ , on peut donc transformer l'intégrale par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt,$$

donc  $P(n+1)$  est vraie. Ce qui termine la preuve. □

**Remarque.** Si  $P$  est une fonction polynôme de degré  $n$  définie sur  $\mathbb{R}$  alors  $P$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $P^{(n+1)} = 0$ . Alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

**Remarque.** La formule de Taylor avec reste intégral présente de fortes similitudes de forme avec la formule de Taylor-Young, vue dans le chapitre sur les développements limités. Ces deux formules ont cependant des natures très différentes :

- La formule de Taylor-Young donne une approximation locale, au voisinage d'un point.
- La formule de Taylor avec reste intégral est une relation globale, qu'on peut appliquer entre deux points  $a$  et  $b$  potentiellement éloignés.

## 5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

### Proposition 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $m$  et  $M$  deux réels tels que  $\forall t \in I, m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ . Alors  $\forall (a, b) \in I^2$  tels que  $a \leq b$ ,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

**Remarque.** Attention : contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral, cette inégalité de Taylor-Lagrange nécessite  $a \leq b$ .

*Démonstration.* On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$ , dont les hypothèses sont vérifiées :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ , on obtient par produit avec  $\frac{(b-t)^n}{n!} \geq 0$  :

$$\frac{(b-t)^n}{n!} m \leq \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{(b-t)^n}{n!} M,$$

puis par croissance de l'intégrale (comme  $a \leq b$ ),

$$m \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

En intégrant, et en remplaçant dans la formule avec le reste intégral, on trouve directement :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}m \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

□

**Proposition 5.3** (Inégalité de Taylor-Lagrange, deuxième version)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq K$ . Alors  $\forall (a, b) \in I^2$ ,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} K.$$

*Démonstration.* Si  $a \leq b$ , il suffit d'appliquer la première version de l'inégalité à  $m = -K$  et  $M = K$ . Si  $b \leq a$ , on reprend la preuve en l'adaptant : par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| = \left| \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right|.$$

Puisque  $b \leq a$ , l'inégalité triangulaire pour les intégrales donne :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \int_b^a \left| \frac{(b-t)^n}{n!} \right| |f^{(n+1)}(t)| dt \leq K \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!} dt = K \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où le résultat annoncé. □

**Exercice 6.** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ .

Solution : La fonction  $f : t \rightarrow \ln(1+t)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$ , donc en particulier de classe  $C^2$ , et on a :

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = \frac{1}{t+1}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \geq -1.$$

On applique la partie minoration de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et  $x > 0$  :

$$-\frac{x^2}{2} \leq f(x) - f(0) - f'(0)x = \ln(1+x) - \ln(1) - 1x.$$

Donc :  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ .

**Exercice 7.** En utilisant la fonction  $f : x \rightarrow \ln(1+x)$  définie sur  $[0, +\infty[$ , à laquelle on appliquera l'inégalité de Taylor-Lagrange, étudier la convergence de la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Solution : La fonction  $f : x \rightarrow \ln(1+x)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$  et on a :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$ ,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(x+1)^k}, \quad \text{donc} \quad |f^{(k)}(x)| = \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} \leq (k-1)!.$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  entre 0 et  $y > 0$ , en majorant  $|f^{(n+1)}(x)|$  par  $n!$  :

$$\left| \ln(1+y) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} y^k}{k} \right| \leq n! \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+1}}{(n+1)}.$$

On trouve en particulier que pour  $y = 1$  :  $|\ln(2) - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ . Donc par encadrement  $(S_n)$  converge vers  $\ln(2)$ .

## 6 Extension au cas des fonctions complexes

**Définition 6.1** (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes, rappel)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $f \in C^0(I, \mathbb{C})$ . On définit  $\int_a^b f \in \mathbb{C}$  par  $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$ .

Cette définition permet de généraliser plusieurs résultats obtenus dans le cas de fonctions à valeurs réelles :

- La formule d'intégration d'une constante et plus généralement les relations intégrale-primitive.
- La linéarité et la relation de Chasles.
- L'inégalité triangulaire : si  $a \leq b$ ,  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ .
- La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange (mais seulement la version avec les modules).

La positivité et la croissance ne sont pas généralisables (puisque'il n'y a pas de relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$ ).