Produits scalaires

Exercice 1 (★). Pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la norme de $(1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2 (★). Soit u et v deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$, $u(x)v(x) \geqslant 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 u(t)dt\right)\left(\int_0^1 v(t)dt\right) \geqslant 1$.

Exercice 3 (★). Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction réelle, continue, et strictement positive sur un segment $[a, b]$.
On pose $\ell(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Montrer que $\ell(f) \geqslant (b - a)^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.

Exercice 5 (★★). Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n}I_{2p}$.

Exercice 6 (★). On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, et les vecteurs $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (2, 2)$. Justifier que (e_1, e_2) est une base de E, et l'orthonormaliser.

Exercice 7 (★). Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$

1. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 8 (★★). Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 9 (★). Dans les cas suivants, déterminer une base de $F^\perp$, sa dimension, et la dimension de F.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect}\left((3, -1)\right)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}\left((1, 0, 1), (-1, -1, 1)\right)$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\right\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 = 0\right\}$.

Exercice 10 (★★). Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - z = 0 \text{ et } y + z = 0\right\}$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus F^\perp$.

Exercice 11 (★★). Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. Montrer que $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 12 (★). Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 2, -1)$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 13 (★). Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance de $v = (1, 2, 3)$ au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$.

Exercice 14 (★★). Soit E un espace de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E.
Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal sur la droite vectorielle dirigée par $\vec{i} - 3\vec{k}$.

Exercice 15 (★★★)**.** Montrer que l'ensemble $A = \left\{\int_0^\pi \left(e^x - a\cos(x) - b\sin(x)\right)^2 dx | (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ admet un minimum que l'on calculera.

Exercice 16 (Type DS)**.** Soit φ l'application définie de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Dans la suite, on notera $\langle P, Q\rangle$ à la place de $\varphi(P,Q)$.
2. Calculer, pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$, l'intégrale $\int_{-1}^1 x^k dx$.
3. (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q_0(X) = 2X - 1$. Calculer $\langle P, Q_0\rangle$ en fonction de a, b, c.
   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(Q_0)$. En déduire une base de $F^\perp$, dont on notera $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ les vecteurs.
4. On note respectivement q_F et $q_{F^\perp}$ les projecteurs orthogonaux sur F et sur $F^\perp$.
   (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le polynôme $q_F(P(X))$ en fonction des réels a, b, c.
   (b) En déduire la matrice représentative de q_F dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis celle de $q_{F^\perp}$.
   (c) Déterminer la distance entre le polynôme $1 - X + 2X^2$ et le sous-espace F.
   (d) Quelles sont les matrices représentatives de q_F et $q_{F^\perp}$ dans la base $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2)$?
5. Déterminer explicitement une base orthonormée (π_0, π_1, π_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée à $F \oplus F^\perp$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)dt = 1$. On note $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ses coordonnées dans la base (π_0, π_1, π_2).
   (a) Sans calculer les α_i, déterminer la valeur de $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.
   (b) Soit $((a,b,c),(a',b',c')) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Montrer que $|aa' + bb' + cc'| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\pi_0(x)^2 + \pi_1(x)^2 + \pi_2(x)^2}$.