Produits scalaires

Exercice 1 (★). Pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la norme de $(1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\|(1, 2, 3)\| = 6$.

Exercice 2 (★). Soit u et v deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$, $u(x)v(x) \geqslant 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 u(t)dt\right)\left(\int_0^1 v(t)dt\right) \geqslant 1$.
Résultat attendu : On se place sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies.

Exercice 3 (★). Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.
Résultat attendu : On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis. Le cas d'égalité correspond aux vecteurs de $\mathrm{Vect}((1, \ldots, 1))$.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction réelle, continue, et strictement positive sur un segment $[a, b]$.
On pose $\ell(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Montrer que $\ell(f) \geqslant (b - a)^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.
Résultat attendu : On se place sur $C([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies. Le cas d'égalité correspond au cas des fonctions constantes.

Exercice 5 (★★). Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n}I_{2p}$.
Résultat attendu : On se place sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies.

Exercice 6 (★). On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, et les vecteurs $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (2, 2)$. Justifier que (e_1, e_2) est une base de E, et l'orthonormaliser.
Résultat attendu : On montre que (e_1, e_2) est une famille libre de E, à $2 = \dim(E)$ éléments. L'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne alors la base orthonormale $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\right)$.

Exercice 7 (★). Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$

1. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. L'algorithme de Gram-Schimdt donne la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(3X^2 - 6X + 1)\right)$.

Exercice 8 (★★). Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E.
Résultat attendu : On utilise la relation proposée pour montrer que la famille est orthogonale. Comme c'est de plus une famille unitaire, qui a $\dim(E)$ éléments, c'est une base orthonormée.

Exercice 9 (★). Dans les cas suivants, déterminer une base de $F^\perp$, sa dimension, et la dimension de F.

1. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathrm{Vect}\left((3,-1)\right)$.
2. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}\left((1,0,1),(-1,-1,1)\right)$.
3. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|3x_1+4x_2-x_3=0\right\}$.
4. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|3x_1+4x_2-x_3=0 \text{ et } 2x_1-x_2=0\right\}$.

Résultat attendu :

1. Une base de $F^\perp$ est $((1,3))$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=1$.
2. Une base de $F^\perp$ est $((1,-2,-1))$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=2$.
3. Une base de $F^\perp$ est $(3,4,-1)$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=2$.
4. Une base de $F^\perp$ est $((3,4,-1),(2,-1,0))$ et on a $\dim(F^\perp)=2$, $\dim(F)=1$.

Exercice 10 (★★). Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|2x-z=0 \text{ et } y+z=0\right\}$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F\oplus F^\perp$.
Résultat attendu : On juxtapose une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$, ce qui donne par exemple la base $\left(\frac{1}{3}(1,-2,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,5,4)\right)$.

Exercice 11 (★★). Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.
3. Montrer que $E=F\oplus G$ si et seulement si $E=F^\perp\oplus G^\perp$.

Résultat attendu :

1. On raisonne par double inclusion.
2. On applique le résultat de la question 1 à $F^\perp$ et $G^\perp$, puis on utilise les raccourcis de la dimension finie.
3. On utilise les questions précédentes pour montrer une implication, les raccourcis de la dimension finie donnent ensuite la réciproque.

Exercice 12 (★). Soit $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u=(1,2,-1)$ sur le plan d'équation $x+y+z=0$.
Résultat attendu : Le projeté orthogonal vaut $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

Exercice 13 (★). Soit $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance de $v=(1,2,3)$ au sous-espace vectoriel $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+2y-z=0\}$.
Résultat attendu : On trouve $d(v,F)=\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 14 (★★). Soit E un espace de dimension 3 et $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée de E.
Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal sur la droite vectorielle dirigée par $\vec{i}-3\vec{k}$.
Résultat attendu : La matrice recherchée est $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&0\\-3&0&9\end{pmatrix}$.

Exercice 15 (★★★). Montrer que l'ensemble $A=\left\{\int_0^\pi\left(e^x-a\cos(x)-b\sin(x)\right)^2dx|(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ admet un minimum que l'on calculera.
Résultat attendu : On se place sur $C([0,\pi],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, pour remarquer que $A=\{\|\exp-f\|^2\,|f\in\mathrm{Vect}(\cos,\sin)\}$. Un premier calcul donne que le projeté de exp sur $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$ vaut $\frac{-e^\pi-1}{\pi}\cos+\frac{e^\pi+1}{\pi}\sin$. On en déduit après un second calcul que $\min(A)=\frac{e^{2\pi}-1}{2}-\frac{(e^\pi+1)^2}{\pi}$.

Exercice 16 (Type DS)**.** Soit φ l'application définie de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Dans la suite, on notera $\langle P, Q\rangle$ à la place de $\varphi(P,Q)$.
2. Calculer, pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^k dx$.
3. (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q_0(X) = 2X - 1$. Calculer $\langle P, Q_0\rangle$ en fonction de a, b, c.
   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(Q_0)$. En déduire une base de $F^\perp$, dont on notera $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ les vecteurs.
4. On note respectivement q_F et $q_{F^\perp}$ les projecteurs orthogonaux sur F et sur $F^\perp$.
   (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le polynôme $q_F(P(X))$ en fonction des réels a, b, c.
   (b) En déduire la matrice représentative de q_F dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis celle de $q_{F^\perp}$.
   (c) Déterminer la distance entre le polynôme $1 - X + 2X^2$ et le sous-espace F.
   (d) Quelles sont les matrices représentatives de q_F et $q_{F^\perp}$ dans la base $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2)$?
5. Déterminer explicitement une base orthonormée (π_0, π_1, π_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée à $F \oplus F^\perp$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P^2(t)dt = 1$. On note $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ses coordonnées dans la base (π_0, π_1, π_2).
   (a) Sans calculer les α_i, déterminer la valeur de $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.
   (b) Soit $((a,b,c),(a',b',c')) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Montrer que $|aa' + bb' + cc'| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\pi_0(x)^2 + \pi_1(x)^2 + \pi_2(x)^2}$.

Résultat attendu :

1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt = \varphi(Q,P)$. Donc φ est symétrique.
   Soit $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale donne :
   $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \int_{-1}^{1}(\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt = \lambda\int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)dt + \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)dt = \lambda\varphi(P_1,Q) + \varphi(P_2,Q)$
   Donc φ est linéaire à gauche, et la bilinéarité découle ensuite de la symétrie.
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (car $-1 \leqslant 1$). On suppose que $\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = 0$. La fonction intégrée est continue et positive, avec $-1 < 1$, donc nulle sur $[-1,1]$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines (les réels de $[-1,1]$). C'est donc le polynôme nul.
2. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires, donc $\int_{-1}^{1} x dx = 0$ et $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$. On trouve ensuite par calcul : $\int_{-1}^{1} x^0 dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = [x]_{-1}^{1} = 2$, puis $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$, puis $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$.
3. (a) $P(X)Q_0(X) = (a+bX+cX^2)(2X-1) = -a + (2a-b)X + (2b-c)X^2 + 2cX^3$. Par linéarité de l'intégrale et 2, $\langle P, Q_0\rangle = \int_{-1}^{1} -a + (2a-b)x + (2b-c)x^2 + 2cx^3 dx = -a\times 2 + 0 + (2b-c)\times\frac{2}{3} + 0 = -2a + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}c$.
   (b) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in F^\perp \Leftrightarrow \langle P, Q_0\rangle = 0 \Leftrightarrow -2a + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow P(X) = a + bX + (-3a+2b)X^2 \Leftrightarrow P(X) = a(1-3X^2) + b(X+2X^2) \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1-3X^2, X+2X^2)$.
   En posant $Q_1(X) = 1 - 3X^2$ et $Q_2(X) = X + 2X^2$, on obtient que $F^\perp = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2)$. Or (Q_1, Q_2) est une famille libre (à montrer), donc c'est une base de $F^\perp$.
4. (a) Soit $\hat{Q}_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|} = \sqrt{\frac{3}{14}}(2X-1)$ (car $\|Q_0\|^2 = \int_{-1}^{1}(2x-1)^2 dx = \int_{-1}^{1}(4x^2-4x+1)dx = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$),
   $q_F(P(X)) = \left\langle P, \hat{Q}_0\right\rangle \hat{Q}_0(X) = \frac{3}{14}\left(-2a + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}c\right)(2X-1) = \frac{(3a-2b+c)+(-6a+4b-2c)X}{7}$.
   (b) 4a donne $q_F(1) = \frac{3-6X}{7}$, $q_F(X) = \frac{-2+4X}{7}$, $q_F(X^2) = \frac{1-2X}{7}$. Donc $\mathrm{Mat}_C(q_F) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $C = (1, X, X^2)$. Or $q_F + q_{F^\perp} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, donc $\mathrm{Mat}_C(q_{F^\perp}) = I_3 - \mathrm{Mat}_C(q_F) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
   (c) D'après 4b, $\mathrm{Mat}_C(q_{F^\perp}(1 - X + 2X^2)) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $q_{F^\perp}(1 - X + 2X^2) = X + 2X^2$.
   Or $\left\|q_{F^\perp}(1 - X + 2X^2)\right\|^2 = \left\|X + 2X^2\right\|^2 = \int_{-1}^{1}(x^2 + 4x^3 + 4x^4)dx = \frac{34}{15}$, donc la distance vaut $\sqrt{\frac{34}{15}}$.
   (d) $Q_0 \in F$ et $(Q_1, Q_2) \in (F^\perp)^2$, donc $q_F(Q_0) = Q_0$, $q_{F^\perp}(Q_0) = 0$, $q_F(Q_1) = 0$, $q_{F^\perp}(Q_1) = Q_1$, $q_F(Q_2) = 0$ et $q_{F^\perp}(Q_2) = Q_2$. On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{Q}}(q_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{Q}}(q_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. (Q_0) est une base de F et (Q_1, Q_2) une base de $F^\perp$. Orthonormaliser (Q_0, Q_1, Q_2) par l'algorithme de Gram-Schmidt (à faire) donne $\pi_0(X) = \sqrt{\frac{3}{14}}(2X-1)$, $\pi_1(X) = \sqrt{\frac{5}{8}}(1-3X^2)$ et $\pi_2(X) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3X+2)$.
6. (a) (π_0, π_1, π_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, donc (théorème de Pythagore) $\|P\|^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Or l'énoncé donne $\|P\|^2 = 1$, donc $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$.
   (b) On pose $u = (a,b,c)$ et $u' = (a',b',c')$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$) donne $|\langle u, u'\rangle| \leqslant |u| \cdot |u'|$, ce qui correspond à l'inégalité demandée.
   (c) Par définition des α_i, $P = \alpha_0\pi_0 + \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \alpha_0\pi_0(x) + \alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)$. 6b donne alors $|P(x)| \leqslant \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\pi_0(x)^2 + \pi_1(x)^2 + \pi_2(x)^2}$, et comme $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ on obtient l'inégalité demandée.