Fonctions de deux variables

Exercice 1 (★). Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des ouverts ? Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
2. $B = [0,1] \times [0,1]$
3. $C =]0,1[\times]0,1[$
4. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
5. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
6. $F =]1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$
7. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
8. $H = (\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}) \times \mathbb{R}_+^*$
9. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geqslant 1\}$

Exercice 2 (★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Exercice 3 (★). Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur U et calculer leurs dérivées partielles. (On ne demande pas de justifier que U est ouvert)

1. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$.
2. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$.
3. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
4. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x\left(\ln(x) + x + y^2\right)$.
5. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.
6. $\forall (x,y) \in U =]0,+\infty[\times]1,+\infty[,\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$.
7. $\forall (x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t,t^2) = 1$. En utilisant la règle de la chaîne, montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Exercice 5 (★★). Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = e^{xy^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $x(t) = t\cos(t)$ et $y(t) = t\sin(t)$. Montrer que $\varphi\ : t \mapsto f(x(t),y(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en utilisant la règle de la chaîne.

Exercice 6 (★). Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, pour laquelle on donne les valeurs suivantes : $f(-1,3) = 7$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,3) = -5$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,3) = 4$.
Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(u,v) = f(5u+3v-1, 8u-6v+3)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les valeurs de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0)$.

Exercice 7 (★★). On s'intéresse aux fonctions f définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

1. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u = x+y$, $v = x+2y$ et $g(u,v) = g(x+y, x+2y) = f(x,y)$. Étudier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de u, v et des dérivées partielles de g.
3. En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont les conditions de l'énoncé.

Exercice 8 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xy(x+y-1).$$

Exercice 9 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Exercice 10 (★)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f.
2. Déterminer un équivalent de $f(x,x) - f(0,0)$ et de $f(x,0) - f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

Exercice 11 (★)**.** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

1. Déterminer l'unique point critique de f, puis son image par f.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, développer l'expression $E = 3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.
3. Que peut-on en conclure sur la nature du point critique ?

Exercice 12 (★★)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles de f.
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.
3. (a) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant xe^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2.b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 (Type DS)**.** On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x + 1 + 2e^x$, ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie $f(x,y) = e^x(x + y^2 + e^x)$.

1. Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.
3. Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, puis montrer qu'il se trouve dans l'intervalle $[-2,-1]$.
   Indication : on rappelle que $e \approx 2,7$.
4. Déterminer le seul point critique de f.
5. Montrer qu'il s'agit d'un extremum global.