Calcul vectoriel

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

2024–2025

Plan du cours

1. Introduction
2. Opértations vectorielles
3. Applications

1 2 3

Introduction

Les **vecteurs**

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.

$\Downarrow$

modèles et calculs

en mécanique

Les **vecteurs**

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.

$\Downarrow$

modèles et calculs

en mécanique

Définition

Définition (Vecteur)

Un vecteur est un objet mathématique, noté $\overrightarrow{u}$ par exemple pour le « vecteur u », qui appartient un espace vectoriel et qui possède trois caractéristiques :

- une direction ;
- un sens ;
- une norme.

- **Notations**
  - $\mathscr{E}$: ensemble des points de l'espace géométrique 3D ;
  - $\mathscr{V}$: ensemble des vecteurs de l'espace ;
  - $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ vers $\overrightarrow{v}$;
  - $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$ une mesure de l'angle opposé.

Propriétés élémentaires

Addition vectorielle

Pour former la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il suffit de considérer trois points A, B, C de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur somme est alors donné par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

L'addition vectorielle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est associative : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathscr{V},\ (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- elle est commutative : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathscr{V},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- elle possède un élément neutre, noté $\overrightarrow{0}$, tel que :
  $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{V},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{V}$ possède un vecteur symétrique $\overrightarrow{v}$ vérifiant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et noté $-\overrightarrow{u}$.

Propriétés élémentaires

Produit d'un vecteur et d'un réel

À tout nombre réel λ et à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{V}$, on peut associer le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$. Ce produit externe vérifie les propriétés suivantes :

- il possède un élément neutre : $\forall\overrightarrow{u} \in \mathscr{V},\ 1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition des réels :
  $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall\overrightarrow{u} \in \mathscr{V},\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :
  $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathscr{V},\ \lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Espace vectoriel

On dira, pour résumer les propriétés de l'addition vectorielle et du produit externe, que le triplet $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires.

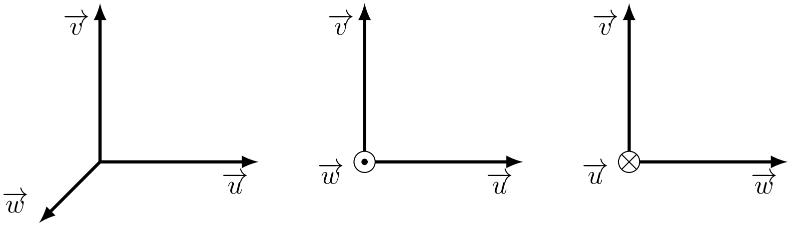
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires.



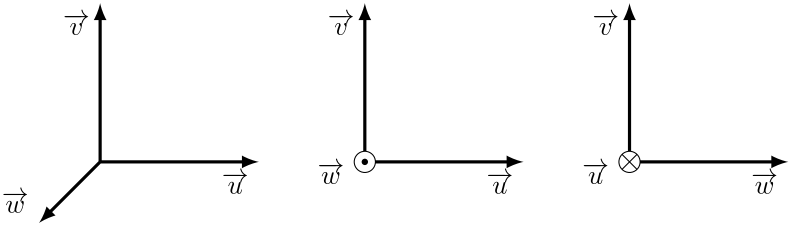
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires.



Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.

Les triplets $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

1 2 3

Opértations vectorielles

Produit scalaire

Définition (Produit scalaire)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\begin{array}{rl} \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \ ; \\ \text{sinon,} & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$$

Produit scalaire

Propriété

Le produit scalaire est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$

- bilinéaire :

$$\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda\left(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v}\right) + \mu\left(\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v}\right)$$

- symétrique :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

- définie positive :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Définition (Norme)

On appelle norme d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ le réel

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \geqslant 0$$

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit vectoriel

Définition (Produit vectoriel)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ;
- sinon, l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, de norme :

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$$

  et tel que le trièdre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit direct (une base directe de l'espace).

Produit vectoriel

Propriété

Le produit vectoriel est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \rightarrow \mathscr{V}$

- bilinéaire :

$$(\lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda \left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v}\right) + \mu \left(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v}\right)$$

- antisymétrique :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

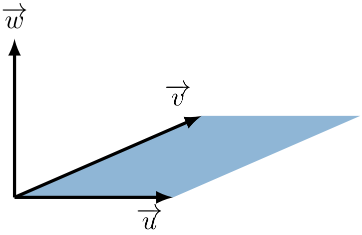
Proposition

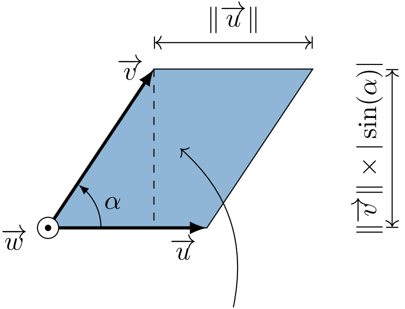
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base orthonormée directe, alors*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= -\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} &= -\left(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} &= -\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

Produit vectoriel

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et de norme la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan $\mathscr{P}$.





Aire $= \|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls, on a :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls, on a :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Double produit vectoriel)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$, *on a :*

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\,\overrightarrow{u}$$

Produit mixte

Définition (Produit mixte)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte (ou déterminant) du triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le réel :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Produit mixte

Propriété

Le produit mixte est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \times \mathscr{V} \rightarrow \mathbb{R}$

- trilinéaire :

$$\begin{aligned}\left[\left(\lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2}\right) \wedge \left(\alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}\right)\right] \cdot \overrightarrow{w} = & \lambda\alpha \left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1}\right) \cdot \overrightarrow{w} + \lambda\beta \left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\right) \cdot \overrightarrow{w} \\ & + \mu\alpha \left(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_1}\right) \cdot \overrightarrow{w} + \mu\beta \left(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_2}\right) \cdot \overrightarrow{w}\end{aligned}$$

- antisymétrique :

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = -\det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = -\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}\right)$$

- alternée :

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right) = \det\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non nuls, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 0 \iff \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non nuls, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non nuls, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 0 \iff \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe, alors

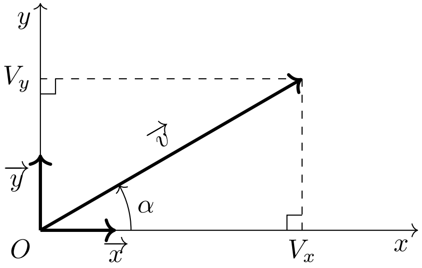
$$\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 1$$

1 2 3

Applications

Projection d'un vecteur

Soit une base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ orthonormée et $\overrightarrow{v}$ un vecteur orienté d'un angle $\alpha = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})$ par rapport à l'horizontale.



Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$:

$$v_x = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{x}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x})}_{-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\alpha)$$

$$v_y = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{y}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{y})}_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\alpha)$$

Projection d'un vecteur

Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y})\,\overrightarrow{y} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{z})\,\overrightarrow{z} \\ &= v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y} + v_z\,\overrightarrow{z}\end{aligned}$$

Du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$, notée $\|\overrightarrow{v}\|$, est la grandeur toujours positive :

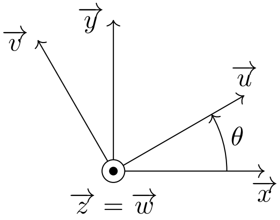
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Changement de base

Définition (Figure géométrale)

On appelle figure géométrale une figure plane permettant de relier deux bases orthonormées possédant une direction commune. L'orientation des vecteurs d'une base par rapport à l'autre est définie par un angle que l'on représentera toujours positif et inférieur à $\pi/4$.

Projections nécessaires au passage de $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ vers $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$:



$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{y} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}=\cos(\theta)\quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{y}=\sin(\theta)\quad \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{x}=-\sin(\theta)\quad \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{y}=\cos(\theta)$$

- Exemple

$$\overrightarrow{V}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}$$

dans la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ s'écrira

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}&=\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{x}+\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{y}+\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{z}\right)\overrightarrow{z}\\&=(a\cos(\theta)-b\sin(\theta))\overrightarrow{x}+(a\sin(\theta)+b\cos(\theta))\overrightarrow{y}+c\overrightarrow{z}\end{aligned}$$

dans la base $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$. Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{V}$, sa norme sera toujours identique :

$$\|\overrightarrow{V}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Distance d'un point à une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par le point A
et dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
Alors :

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{u}$$

Proposition (Distance point-droite)

Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$ une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. La distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ est définie par :

$$d\,(M,\mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Distance d'un point à un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant le point A
et de normale définie par le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$.
Alors :

$$M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Proposition (Distance point-plan)

Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$ un plan contenant le point A et de normale $\overrightarrow{n}$. La distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est définie par :

$$d\left(M, \mathscr{P}\right) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Décomposition orthogonale d'un vecteur

Soit $\mathscr{P}$ un plan de normale $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$.
En exploitant la formule du double produit vectoriel selon

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \overrightarrow{n} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n})\, \overrightarrow{n} - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n})\, \overrightarrow{u}$$

il vient que l'on peut décomposer tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ selon :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \left[(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u})\, \overrightarrow{n} + (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{n} \right]$$

en un vecteur colinéaire à la normale $\overrightarrow{n}$ et en un vecteur parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Pour finir…

Une « nouvelle » version du théorème de Pythagore !

$$\left(\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2+\left(\frac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2=1$$