Développements limités et études locales

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles, mais les résultats se généralisent sans difficulté au cas de valeurs complexes.

1 Développements limités

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f **admet un développement limité** d'ordre n en a lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple. On sait que $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc $\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$. Donc sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0$, $a_1 = 1$). Sa partie régulière est x.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Donc $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$.

On en déduit que $\dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui vaut : $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Remarque. Un développement limité fournit des approximations polynomiales de f au voisinage du point étudié : la courbe $y = a_0$ est la meilleure approximation à l'ordre 0, $y = a_0 + a_1(x-a)$ la meilleure à l'ordre 1, etc.

Remarque. On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0, puisque $\displaystyle\lim_{h \to 0}(a+h) = a$: si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$, alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right).$$

Proposition 1.2 (Unicité du développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors ce développement est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Les soustraire donne :

$$0 \underset{x \to a}{=} (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x-a) + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

On raisonne par l'absurde et suppose que $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (b_0, b_1, \ldots, b_n)$. Soit p le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq b_p$. Alors

$$(a_p - b_p)(x-a)^p + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^n \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right),$$

ce qui donne, en divisant par $(x-a)^p \neq 0$,

$$(b_p - a_p) \underset{x \to a}{=} (a_{p+1} - b_{p+1})(x-a) + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right) \longmapsto_{x \to a} 0.$$

Donc $a_p = b_p$, absurde. D'où le résultat. $\square$

Proposition 1.3 (Troncature)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. On suppose que f admet un développement limité $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f admet un développement limité $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^k\right)$.

Démonstration. On sait que $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $p \geqslant k+1$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)^p}{(x-a)^k} = \lim\limits_{x \to a} (x-a)^{p-k} = 0$, donc $(x-a)^p = o\left((x-a)^k\right)$. On en déduit par propriété des négligeabilités que :

$$a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) = o((x-a)^k).$$

D'où le résultat. □

Remarque. Si on connaît un développement limité d'une fonction à un ordre $n \in \mathbb{N}$, on en connaît donc aussi à tous les ordres inférieurs.

Exemple. La relation $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ donne directement que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Cette deuxième relation porte cependant moins d'informations que la première.

Proposition 1.4 (Cas des fonctions paires ou impaires)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0.

- Si f est paire, les coefficients de rang impair du développement limité sont nuls.
- Si f est impaire, les coefficients de rang pair du développement limité sont nuls.

Démonstration. On traite le cas f paire (le cas f impaire se gère de la même façon). Puisqu'elle admet un développement limité à l'ordre n en 0, il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$, une composition à droite donne $f(-x) \underset{x \to 0}{=} a_0 - a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$. Par parité, ces deux développements limités correspondent à la même fonction. L'unicité du développement limité donne alors $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3$, ... Ce qui permet de conclure. □

Exemple. On a vu précédemment que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. Or $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + o((-x^2)^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \underset{x \to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.5 (Somme de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a. Alors $f + \lambda g$ admet un développement limité d'ordre n en a. La partie régulière du développement limité de $f + \lambda g$ est égale à la partie régulière du développement limité de f plus λ fois la partie régulière du développement limité de g.

Démonstration. On suppose qu'on a les développements $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$ et $g(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$. Alors, par combinaison linéaire de ces égalités,

$$(f + \lambda g)(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + \lambda b_0 + (a_1 + \lambda b_1)(x-a) + \cdots + (a_n + \lambda b_n)(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right),$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. □

Proposition 1.6 (Produit de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a. Alors fg admet un développement limité d'ordre n en a.
La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g.

Démonstration. On suppose qu'on a les développements $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$. Alors, par produit de ces égalités,

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &\underset{x\to a}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i + o\left((x-a)^n\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j(x-a)^j + o\left((x-a)^n\right)\right) \\
&\underset{x\to a}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j(x-a)^j\right) + o\left((x-a)^n\right) + o\left((x-a)^n\right) + o\left((x-a)^{2n}\right) \\
&\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} a_i b_j (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right),
\end{aligned}$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. $\square$

Exercice 1. Déterminer un développement limité de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ à l'ordre 2 en 0.

Solution : Comme $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$, on trouve par produit et en développant :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 &\underset{x\to 0}{=} (1+x+x^2+o(x^2))(1+x+x^2+o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} (1+x+x^2) + (x+x^2) + (x^2) + o(x^2) \\
\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Proposition 1.7 (Primitivation d'un développement limité)

Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction dérivable sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f' admet pour développement limité $f'(x) \underset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$.

Alors f admet pour développement limité $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$

Démonstration. On pose g la fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in I$, $g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$. Elle est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in I$, $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, on a donc $g'(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.
Soit $x \in I \setminus \{a\}$. La fonction g est continue et dérivable sur I, donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel c_x compris entre a et x tel que $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$. On construit ainsi une fonction c de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in I$, $|c_x - a| \leqslant |x-a|$. Un théorème d'encadrement donne alors que $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$, et :

$$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| = \left|\frac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right|\left|\frac{(c_x-a)^n}{(x-a)^n}\right| \leqslant \left|\frac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right| \underset{x\to a}{\longmapsto} 0,$$

où cette dernière limite s'obtient par composition à droite dans la relation $g'(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$. On en déduit que $g(x) = o\left((x-a)^{n+1}\right)$, d'où le résultat annoncé en remplaçant g par sa définition. $\square$

Remarque. Attention : dans le cas général, on ne peut par contre pas dériver un développement limité.

Proposition 1.8 (Développement limité de $\tan(x)$)

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Démonstration. On a déjà vu que $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Or tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Donc par opérations sur les négligeabilités,

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + xo(x) + xo(x) + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2).$$

On trouve donc en primitivant : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. □

1.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.9 (Existence d'un développement limité d'ordre 0)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a. On a alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1).$$

Donc si f est continue en a, elle admet bien un développement limité d'ordre 0 en ce point. Réciproquement, s'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = a_0$. Donc $a_0 = f(a)$ et f est continue en a. □

Proposition 1.10 (Existence d'un développement limité d'ordre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a. On a alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)).$$

Démonstration.

— Si f est dérivable en a, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} f'(a) + o(1)$, ce qui donne bien $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.

— Réciproquement, si f admet un développement limité d'ordre 1 en a, il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ telles que $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o((x-a))$. Un passage à la limite donne $\lim_{x\to a} f(x) = a_0$, donc $a_0 = f(a)$. On en déduit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} a_1 + o(1)$, ce qui donne $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 \in \mathbb{R}$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

□

Proposition 1.11 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « Si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$ ».

— Si f est continue sur I, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o\left(1\right) \underset{x\to a}{=} \frac{(x-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) + o\left((x-a)^0\right)$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors f est dérivable sur I et $f' \in C^n(I, \mathbb{R})$. L'hypothèse de récurrence appliquée à f' donne alors : $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$,

ce qui donne en primitivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + o\left((x-a)^{n+1}\right) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + o\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat annoncé. □

Remarque. On peut également écrire $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left(h^n\right)$.

1.4 Développements limités usuels en 0

Proposition 1.12 (Développement limité de la fonction exponentielle)

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$. D'après la formule de Taylor-Young, l'exponentielle admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp(0) + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

□

Proposition 1.13 (Développement limité de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$)

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Démonstration. On revient à la définition des deux fonctions, en utilisant le développement limité d'exponentielle à l'ordre $2n+1$ et en composant à droite par $-x$ car $\lim_{x\to 0} -x = 0$:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^{2n+1})}{2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

On procède de même pour ch. □

Remarque. Les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o.

Exercice 2. Déterminer les développements limités en 0 de sh et ch à l'ordre 5.

Solution : $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$.

Proposition 1.14 (Développement limité de la fonction inverse)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Le premier développement limité a été montré en exemple dans le début du chapitre. Le deuxième s'en déduit par composition à droite puisque $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$. $\square$

Proposition 1.15 (Développement limité de la fonction logarithme)

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Démonstration. On primitive le développement limité $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$, ce qui donne :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\frac{x^i}{i} + o(x^n) \text{ en posant } i = k+1.$$

$\square$

Proposition 1.16 (Développement limité de $\arctan(x)$)

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Démonstration. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, donc $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ et par passage aux primitives,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

$\square$

Proposition 1.17 (Développement limité des fonctions puissances)

Pour tout réel α,

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^n sur $]-1, +\infty[$ et d'après les formules de dérivées usuelles, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$\square$

Exercice 3. Déterminer un développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Solution : La formule donne : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Proposition 1.18 (Développement limité de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$ et d'après les formules de dérivées usuelles, $\forall k \in [\![0, 2n+1]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc pour développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

On procède de même pour cos. $\square$

1.5 Exemples de calculs

Exercice 4. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Solution : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Exercice 5. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Solution : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Exercice 6. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \exp(x)$.

Solution : $\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. De plus, $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ donc

$$\sqrt{1+2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc $\sqrt{1+2x} - \exp(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2)$.

Exercice 7. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x}$.

Solution : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$, d'où par produit :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^3) \\
\frac{\cos(x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 8. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.
Solution : On commence par chercher un développement limité à l'ordre 6 (puisqu'on divisera ensuite par x) en 0 de $x \mapsto \ln(1+x^2)$. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6).$$

Diviser par x donne alors :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5).$$

Exercice 9. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.
Solution : $1+\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Or $\lim\limits_{x\to 0}(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = 0$ et on a $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$, une composition à droite donne donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \\
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

2 Étude locale de suites et de fonctions

2.1 Recherche de limite ou équivalent

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.
Solution : On commence par tout mettre au même dénominateur pour y voir plus clair : $\forall x \in]0,1]$,

$$f(x) = \frac{2}{\sin(x)\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) - \sin(x)\right).$$

Les équivalents usuels donnent le comportement du dénominateur : $\sin(x)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, ils ne permettent par contre pas de gérer directement le numérateur (puisqu'il est interdit de sommer des équivalents). On cherche donc un développement limité en 0 du numérateur (l'ordre est à déterminer pendant le calcul afin d'obtenir au moins un terme non nul).

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

On en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11. Déterminer un équivalent de la suite $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Solution : On commence par étudier la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$ (de manière à chercher un développement limité en 0). On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc par somme de développements limités :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par composition à droite, $u_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

2.2 Positions relatives de la courbe et sa tangente

Exercice 12. Déterminer la tangente en 0 de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x}$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.
Solution : L'exercice 7 nous donne $\frac{\cos(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = 1 - x$ (par propriété des développements limités d'ordre 1), et

$$f(x) - (1-x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \geqslant 0.$$

Au voisinage de 0, la courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0.

2.3 Recherche d'asymptote

Définition 2.1 (Asymptote)

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax+b$ pour **asymptote** au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1) \qquad (\text{resp. } f(x) \underset{x\to-\infty}{=} ax + b + o(1))$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+2}$. Déterminer son asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
Remarque : on pourrait utiliser une décomposition en éléments simples, mais on ne le fera pas ici pour travailler les compétences de développements limités.
Solution : On commence par poser $x = \frac{1}{h}$ pour se ramener à une étude au voisinage de 0 et on factorise le dénominateur pour se ramener au développement limité en 0 de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$:

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h^2} + 2} = \frac{1+h}{h+2h^3} = \frac{1+h}{h}\frac{1}{1+2h^2}.$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} 2h^2 = 0$, on trouve en composant à droite :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1+h}{h}\left(1 - 2h^2 + o(h^2)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1+h-2h^2+o(h^2)}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h} + 1 - 2h + o(h).$$

On en déduit :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $y = x+1$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$ et $f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{x} \leqslant 0$. La courbe est donc en dessous de son asymptote.

2.4 Recherche d'extremum local

Remarque. Rappel : les extremums locaux d'une fonction de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, sur un intervalle quelconque, sont à chercher parmi :
— ses points critiques,

— les points où la fonction n'est pas dérivable,
— les bornes de l'intervalle.

Proposition 2.2 (Utilisation de la dérivée seconde)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et soit $c \in I$ un point critique de f. Alors,
— Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors f possède un minimum local en c.
— Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors f possède un maximum local en c.

Remarque. Si $f^{(2)}(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Démonstration. La fonction f est de classe C^2, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 en c : pour h au voisinage de 0,

$$f(c+h) \underset{h\to 0}{=} f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2).$$

Or c est un point critique de f, donc $f'(c) = 0$, et on a pour h au voisinage de 0 :

$$f(c+h) - f(c) \underset{h\to 0}{=} \frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2).$$

— Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors $f(c+h) - f(c) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2}f''(c) > 0$ et f possède un minimum local en c.
— Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors $f(c+h) - f(c) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2}f''(c) < 0$ et f possède un maximum local en c.

$\square$

Exercice 14. Trouver les extremums de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.
Solution : Par le théorème des bornes, la fonction est continue sur un segment, donc admet au moins un minimum global et un maximum global (il va falloir les déterminer). La fonction f est de classe C^2 sur son intervalle de définition, donc les extremums sont soit des points critiques, soit des bornes de l'intervalle. On commence par chercher les points critiques : $\forall x \in [-2, \frac{3}{2}]$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ et } f''(x) = 6x - 2.$$

Donc $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$. On cherche les racines de ce polynôme : $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$, donc on a deux racines réelles, qui sont 1 et $-\frac{1}{3}$.
Il y a donc au total quatre points à étudier : 1, $-\frac{1}{3}$, -2 et $\frac{3}{2}$. On commence par calculer leurs images :

$$f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27} \simeq 1,19, \quad f(-2) = -9, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8} \simeq 0,63.$$

Le minimum global vaut donc -9 et est atteint en -2, et le maximum global vaut $\frac{32}{27}$ et est atteint en $-\frac{1}{3}$.
Il ne reste plus qu'à étudier les deux points restants : $f''(1) = 4 > 0$, donc 0 correspond à un minimum local atteint en 1. De plus,

$$f\left(\frac{3}{2}+h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} hf'\left(\frac{3}{2}\right) + o(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{11}{4}h + o(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{11}{4}h.$$

C'est négatif à gauche de $\frac{3}{2}$ (qui est la borne de droite de l'intervalle), donc $\frac{5}{8}$ correspond à un maximum local atteint en $\frac{3}{2}$.

2.5 Étude asymptotique de suites

Exercice 15. On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ telles que $\begin{cases} x_n \longrightarrow -\infty \\ e^{x_n} = x_n + n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_n \longrightarrow +\infty \\ e^{y_n} = y_n + n \end{cases}$.
Un exercice de la fiche d'exercices « Limites et continuité » garantit la bonne définition de ces suites, en déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$.
Solution :

— On conjecture que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x_n} - n}{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{x_n}}{-n} + 1 \right) = 0 + 1 = 1,$$

puisque par composition $\lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. D'où l'équivalent annoncé.

— On conjecture que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(e^{y_n} - y_n)}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(e^{y_n}) + \ln(1 - \frac{y_n}{e^{y_n}})}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{y_n}{e^{y_n}})}{y_n} \right) = 1 + 0 = 1,$$

puisque par croissances comparées et composition, $\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{e^{y_n}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$. D'où l'équivalent annoncé.

Exercice 16. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$ ».
   — $u_1 = 1$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 1 + 2$ et $P(1)$ est vraie.
   — $u_2 = 1 + \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2}$ donc $1 \leqslant u_2 \leqslant 1+1$ et $P(2)$ est vraie (vérifier $P(2)$ est nécessaire pour pouvoir supposer $n \geqslant 2$ dans l'hérédité).
   — Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Donc $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n} \leqslant 1 \ \ + 1 \ \ = 2$, on en déduit $0 \leqslant \frac{u_n}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}$. Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \frac{2}{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.
   On obtient donc bien l'inégalité voulue.

2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$:

   Solution : Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Donc $u_n = 1 + o(1)$.

3. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:

   Solution : $u_n = 1 + o(1)$, donc $\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Rmq : on peut formaliser cette dernière égalité avec une composition à droite, puisque $\lim_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$, mais ce n'est pas la difficulté principale de la question.

4. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

   Solution : $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$.
   Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} + o\left(\frac{1}{(n-1)n}\right)$, ce qui donne successivement $u_n - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2}$ (grâce à la relation entre équivalents et négligeabilités). Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$:

   Solution : $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $1 + \frac{u_n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2(n+1)}\right)$.
   Donc $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{n(n+1) - n^2 + n + 1}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
   On poursuit : $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{2}{n(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n(n+1)^2}\right)$.
   Donc $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{2}{n(n+1)^2} \sim \frac{2}{(n+1)^3}$. On a enfin $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)$ puis $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.