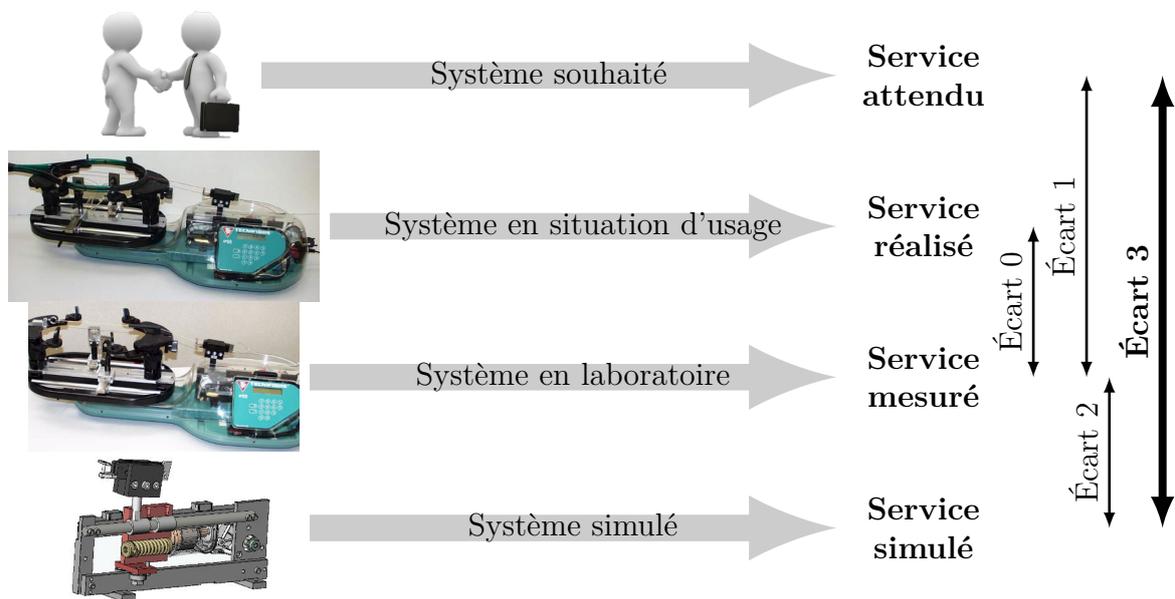


Architecture des chaînes de solides et théorie des mécanismes

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Recherche de liaisons équivalentes	3
Exercice 2 – Machine à mesurer tridimensionnelle	5



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 16 mai 2025 —

Recherche de liaisons équivalentes

Question 1.1.

Cas n° 1 On identifie une liaison sphérique de centre C en série avec une liaison appui plan de normale \vec{n} . On note $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{n} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_2 \vec{n} \\ v_2 \vec{i} + w_2 \vec{j} \end{array} \right\}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\}_C = \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C + \{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + p_2) \vec{n} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ v_2 \vec{i} + w_2 \vec{j} \end{array} \right\}$$

Une seule mobilité est bloquée : la translation dans la direction \vec{n} . On identifie alors une liaison sphère-plan de normale (C, \vec{n}) . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 5$$

et un degré de mobilité interne

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 1$$

qui correspond à la rotation autour de l'axe (C, \vec{n}) , que l'on peut identifier avec le couple $p_1 + p_2$.

Cas n° 2 On identifie une liaison sphérique de centre C en série avec une liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{u}) . On note $(\vec{u}, \vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{u} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_2 \vec{u} \\ u_2 \vec{u} \end{array} \right\}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\}_C = \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C + \{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + p_2) \vec{u} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ u_2 \vec{u} \end{array} \right\}$$

Deux mobilités sont bloquées : les translations dans les directions \vec{i} et \vec{j} . On identifie alors une liaison sphère-cylindre de centre C et d'axe (C, \vec{u}) . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 4$$

et un degré de mobilité interne

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 1$$

qui correspond à la rotation autour de l'axe (C, \vec{u}) , que l'on peut identifier avec le couple $p_1 + p_2$.

Cas n° 3 On identifie une liaison pivot d'axe (C, \vec{u}) en série avec une liaison appui plan de normale $\vec{n} \perp \vec{u}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \left\{ \begin{array}{c} r_2 \vec{n} \\ u_2 \vec{u} + v_2 \vec{v} \end{array} \right\}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{u} + r_2 \vec{n} \\ u_2 \vec{u} + v_2 \vec{v} \end{array} \right\}$$

Deux mobilités sont bloquées : la rotation autour de l'axe (C, \vec{v}) et la translation dans la direction \vec{n} . On identifie alors une liaison cylindre-plan d'axe (C, \vec{u}) et de normale \vec{n} . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 4$$

et aucune mobilité interne car

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 0$$

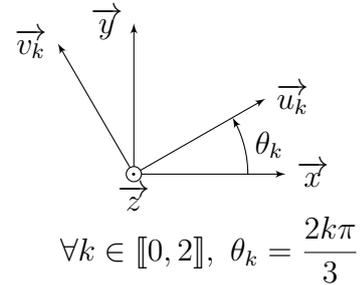
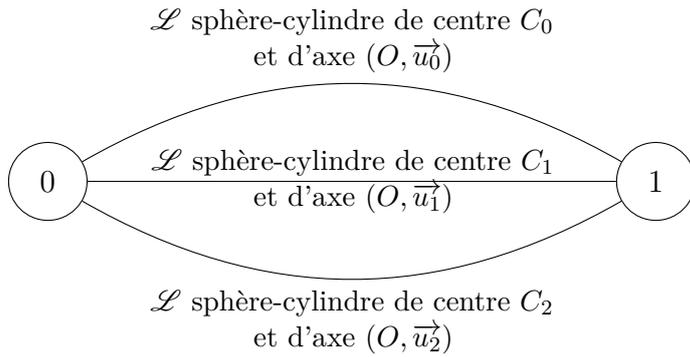
Question 1.2. Il est intéressant de réaliser des liaisons associées à un modèle de contact de type linéique ou ponctuel par l'intermédiaire de contacts surfaciques pour limiter les pressions de contact et donc l'usure des pièces en mouvements relatifs.

Machine à mesurer tridimensionnelle

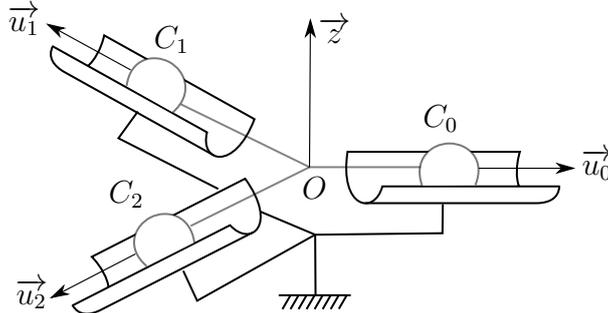
Question 2.1. On identifie sur la vue 3D, trois liaisons sphère-cylindre de centres $(C_k)_{0 \leq k \leq 2}$ équirépartis sur un cercle de centre O et de rayon ℓ , dans un plan de normale \vec{z} et d'axes concourants en O tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \overrightarrow{OC_k} = \ell \vec{u}_k$$

Il vient alors le graphe de structure :



avec $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base orthonormée directe tel que : Il vient le schéma cinématique :



Question 2.2. Comme les trois liaisons sont en parallèle, on a avec la méthode cinématique les équations de compatibilité des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{①}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{②}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{③}}\}$$

Pour exprimer les moments de ces équations de compatibilité, on choisit le point O , intersection des axes, et on note

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{l} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \end{array} \right\}_O$$

les éléments de réduction au point O du torseur cinématique de la liaison équivalente. Sachant que l'on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{③}}\}_{C_k} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{u}_k + q_k \vec{v}_k + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{u}_k \end{array} \right\}$$

il vient par changement de point :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{O,1/0}^{(k)}} &= \overrightarrow{V_{C_k,1/0}^{(k)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}^{(k)}} \wedge \overrightarrow{C_k O} \\
&= u_k \overrightarrow{u_k} + (p_k \overrightarrow{u_k} + q_k \overrightarrow{v_k} + r_k \overrightarrow{z}) \wedge -\ell \overrightarrow{u_k} \\
&= u_k \overrightarrow{u_k} - \ell r_k \overrightarrow{v_k} + \ell q_k \overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

Avec les projections

\bullet	$\overrightarrow{u_0}$	$\overrightarrow{v_0}$	$\overrightarrow{u_1}$	$\overrightarrow{v_1}$	$\overrightarrow{u_2}$	$\overrightarrow{v_2}$
\overrightarrow{x}	1	0	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
\overrightarrow{y}	0	1	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$

il vient, dans la base \mathcal{B} , les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned}
/\overrightarrow{x} : p &= p_0 = \frac{-p_1 - \sqrt{3}q_1}{2} = \frac{-p_2 + \sqrt{3}q_2}{2} \\
/\overrightarrow{y} : q &= q_0 = \frac{\sqrt{3}p_1 - q_1}{2} = \frac{-\sqrt{3}p_2 - q_2}{2} \\
/\overrightarrow{z} : r &= r_0 = \frac{r_1}{r_2} \\
/(O, \overrightarrow{x}) : u &= u_0 = \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r_1}{2} = \frac{-u_2 - \sqrt{3}\ell r_2}{2} \\
/(O, \overrightarrow{y}) : v &= -\ell r_0 = \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r_1}{2} = \frac{-\sqrt{3}u_2 + \ell r_2}{2} \\
/(O, \overrightarrow{z}) : w &= \ell q_0 = \frac{\ell q_1}{\ell q_2}
\end{aligned}$$

Avec la ligne (3), il vient :

$$r = r_0 = r_1 = r_2$$

d'où, avec $\ell \neq 0$ et les lignes (4) et (5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r}{2} = \frac{-u_2 - \sqrt{3}\ell r}{2} \\ \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r}{2} = \frac{-\sqrt{3}u_2 + \ell r}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 2\sqrt{3}\ell r \\ u_1 + u_2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sqrt{3}\ell r \\ u_2 = -\sqrt{3}\ell r \end{array} \right.$$

Or, avec la ligne (5), on a aussi :

$$-\ell r = \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r}{2} = 2\ell r \iff \boxed{r = 0} \implies \left\{ \begin{array}{l} \boxed{u_1 = u_2 = 0} \\ \boxed{v = 0} \end{array} \right. \text{ (ligne 5)}$$

d'où, avec la ligne (4), on tire :

$$u = u_0 = \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r}{2} = 0 \iff \boxed{u = u_0 = 0}$$

De façon similaire, après exploitation de la ligne (6) sachant $\ell \neq 0$, il vient

$$q_0 = q_1 = q_2 = q$$

avec la notation adaptée de la ligne (2), il vient avec les lignes (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{-p_1 + \sqrt{3}q}{2} = \frac{-p_2 + \sqrt{3}q}{2} \\ \frac{\sqrt{3}p_1 - q}{2} = \frac{-\sqrt{3}p_2 - q}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = p_2 \\ p_1 = -p_2 \end{cases} \iff \boxed{p_1 = p_2 = 0}$$

Or, avec la ligne (2), on a aussi :

$$q = -\frac{q}{2} \iff \boxed{q = 0} \implies \begin{cases} \boxed{p = p_0 = 0} & \text{(ligne 1)} \\ \boxed{w = 0} & \text{(ligne 6)} \end{cases}$$

résultats que l'on aurait pu obtenir directement avec les changements de variables $u_k \rightarrow p_k$, $\ell r_k \rightarrow -q_k$ et $\ell q_k \rightarrow r_k$. Sachant que l'on a $p = q = r = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $u = v = w = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{0\}}$$

qui ne présente aucune mobilité et correspond au torseur cinématique d'une liaison complète.

Question 2.3. Comme les trois liaisons sont en parallèle, on a avec la méthode statique la somme des actions mécaniques transmissibles :

$$\{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} + \{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}\} + \{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}\}$$

Pour exprimer les moments de cette somme, on choisit le point O , intersection des axes, et on note

$$\{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{array} \right\} \\ O \end{matrix}$$

les éléments de réduction au point O du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente. Sachant que l'on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}\}_{C_k} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} Y_k \vec{v}_k + Z_k \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\ C_k \end{matrix}$$

il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} &= \overrightarrow{M_{C_k,0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} \wedge \overrightarrow{C_k O} \\ &= (Y_k \vec{v}_k + Z_k \vec{z}) \wedge -\ell \vec{u}_k \\ &= -\ell Z_k \vec{v}_k + \ell Y_k \vec{z} \end{aligned}$$

Avec les projections des vecteurs \vec{u}_k et \vec{v}_k , $0 \leq k \leq 2$, dans la base \mathcal{B} , il vient par somme :

$$\left\{ \begin{array}{l} / \vec{x} : X = 0 + \frac{-\sqrt{3}Y_1}{2} + \frac{\sqrt{3}Y_2}{2} \\ / \vec{y} : Y = Y_0 + \frac{-Y_1}{2} + \frac{-Y_2}{2} \\ / \vec{z} : Z = Z_0 + \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \\ / (O, \vec{x}) : L = 0 + \frac{\sqrt{3}\ell Z_1}{2} + \frac{-\sqrt{3}\ell Z_2}{2} \\ / (O, \vec{y}) : M = -\ell Z_0 + \frac{\ell Z_1}{2} + \frac{\ell Z_2}{2} \\ / (O, \vec{z}) : N = \ell Y_0 + \ell Y_1 + \ell Y_2 \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire sous la forme du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\ell/2 & -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & -\ell/2 & \ell/2 & 0 \\ \ell & \ell & 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

telle que, en procédant aux opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}L_1 \\ L_5 &\leftarrow L_5 + \ell L_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}L_4 \end{aligned}$$

on ait la matrice équivalente par lignes :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\ell/2 & -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\ell & 0 \\ \ell & \ell & 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} \implies \text{rang}(A) = 6$$

ce qui signifie que la dimension du sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\}$ est de dimension :

$$\dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = \text{rang}(A) = 6$$

La liaison équivalente possède donc 6 inconnues d'actions mécaniques transmissibles distinctes : c'est donc une liaison complète.

Question 2.4. Pour des liaisons en parallèle, on a :

$$h = \sum_{k=0}^2 \dim(\mathcal{T}_{01}^{\circledast k}) - \dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = 3 \times 2 - 6 = 0$$

qui signifie que la liaison complète réalisée avec ces trois liaisons sphère-cylindre en parallèle est isostatique. Elle ne nécessitera donc pas d'être réglée pour être montée.