Introduction au cours de physique

# Chapitre n°0 Analyse dimensionnelle

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'aborder quelques notions que vous avez déjà rencontrées au lycée et qui vous seront utiles tout au long de vos études. Nous allons repréciser le système international, ses dimensions et ses unités, reverrons les conversions. Enfin, nous utiliserons l'analyse dimensionnelle notamment pour étudier l'homogénéité d'une expression, qui sera une étape indispensable pour l'ensemble des calculs que vous effectuerez.

## Plan du cours



## I Dimensions et unités fondamentales

### I.1 Dimensions et unités du système international

**Définitions : Dimension et unité**

- La **dimension** d'une grandeur renseigne sur sa nature physique.
  Par exemple une distance, une altitude, ont pour dimension une longueur.
- La **dimension d'une grandeur physique est plus générale que l'unité** : la même grandeur peut s'exprimer avec des unités très différentes.
- L'**unité** est indispensable pour renseigner sur la valeur de la grandeur physique. Elle est inutile sinon.

On peut montrer que la dimension de n'importe quelle grandeur physique peut toujours s'exprimer en fonction de sept dimensions « fondamentales », auxquelles on associe 7 unités de base, celles du système international définies par le BIPM [1] https://www.bipm.org/fr/measurement-units/

**À retenir : Dimensions et unités du système international**

| Grandeur | Symbole dimensionnel | Unité (SI) |
|---|---|---|
| Longueur | $L$ | mètre (m) |
| Masse | $M$ | kilogramme (kg) |
| Temps | $T$ | seconde (s) |
| Intensité du courant | $I$ | Ampère (A) |
| Température | $\Theta$ | Kelvin (K) |
| Quantité de matière | $N$ | mole (mol) |
| Intensité lumineuse | $J$ | Candela (Cd) |


Le Système International est né en 1960 (11$^{e}$ CGPM [2]) avec 6 unités de base, la mole a été ajoutée au SI en 1971 (14$^{e}$ CGPM).

1. Bureau International des Poids et Mesures, organisation intergouvernementale
2. CGPM = Conférence générale des poids et mesures. C'est l'assemblée générale du BIPM qui se réunit tous les 4 ans

## I.2 Conversions et préfixes des unités du SI

**À retenir : Préfixes des unités**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| quecto | ronto | yocto | zepto | atto | femto | pico | nano | micro | milli | centi | déci |
| q | r | y | z | a | f | p | n | µ | m | c | d |
| $10^{-30}$ | $10^{-27}$ | $10^{-24}$ | $10^{-21}$ | $10^{-18}$ | $10^{-15}$ | $10^{-12}$ | $10^{-9}$ | $10^{-6}$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-1}$ |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| déca | hecto | kilo | mega | giga | tera | péta | exa | zetta | yotta | ronna | quetta |
| da | h | k | M | G | T | P | E | Z | Y | R | Q |
| $10^{1}$ | $10^{2}$ | $10^{3}$ | $10^{6}$ | $10^{9}$ | $10^{12}$ | $10^{15}$ | $10^{18}$ | $10^{21}$ | $10^{24}$ | $10^{27}$ | $10^{30}$ |

## I.3 La définition actuelle des 7 unités du SI

### LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à $s^{-1}$.

### LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, *c*, égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m\ s^{-1}$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

### LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, *h*, égale à $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J s, unité égale à $kg\ m^2 s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.

### L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, *e*, égale à $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

### LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, *k*, égale à $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $J\ K^{-1}$, unité égale à $kg\ m^2 s^{-2} K^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *h*, *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.

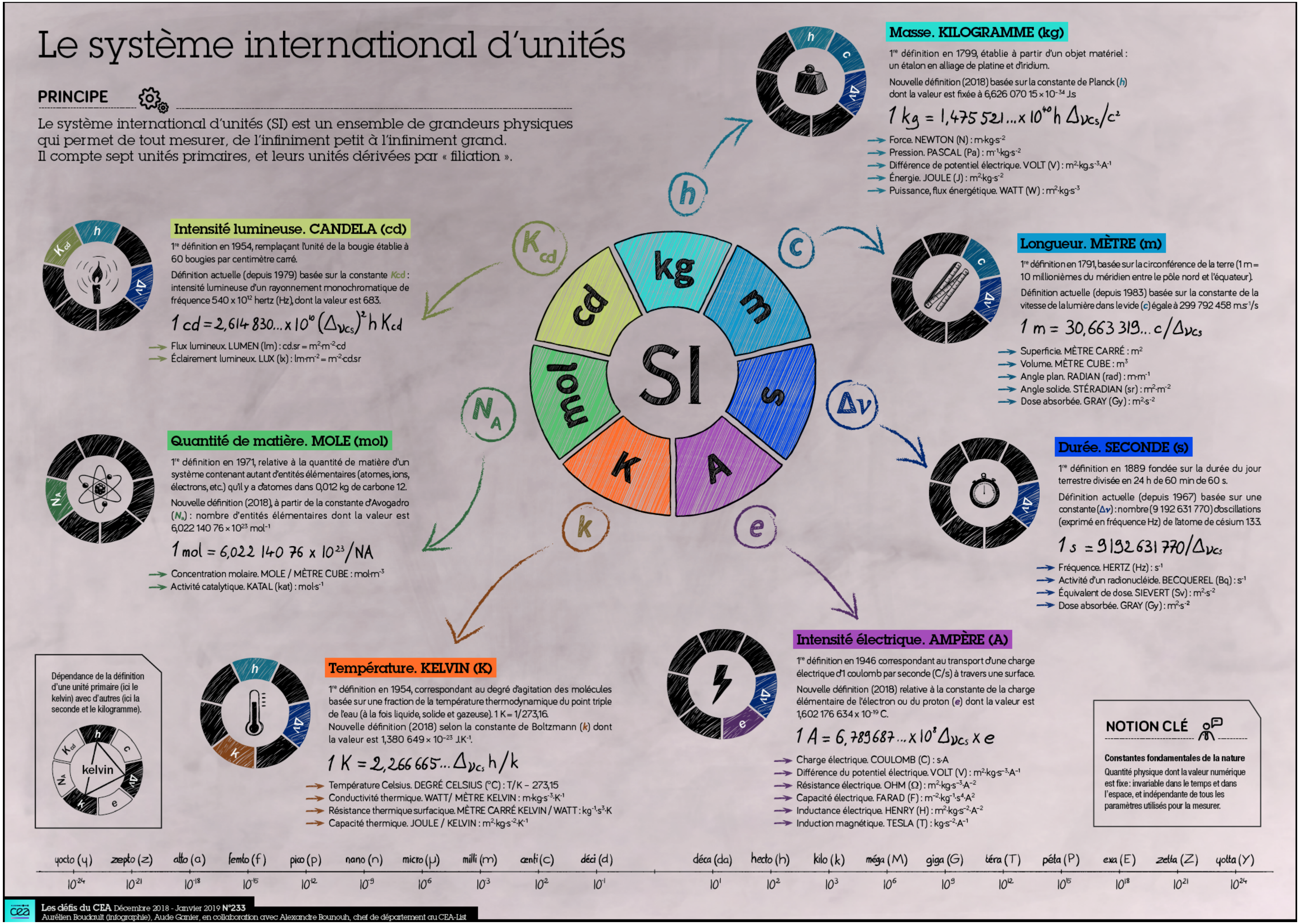
### LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, $N_A$, lorsqu'elle est exprimée en $mol^{-1}$.

La quantité de matière, symbole *n*, d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.

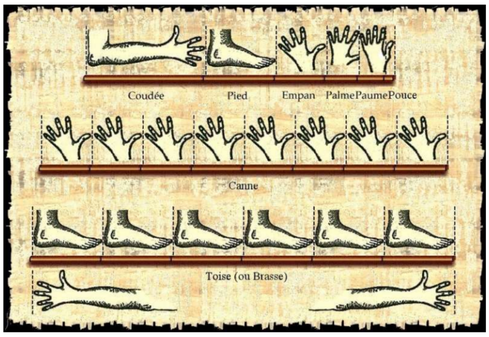
### LA CANDELA

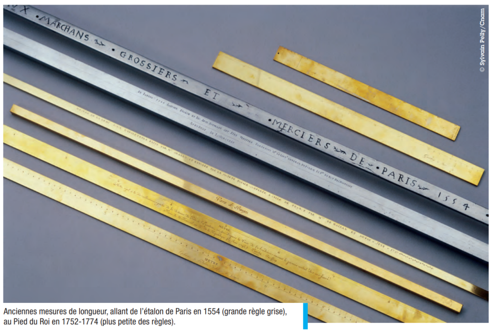
La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}$ Hz, $K_{cd}$, égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm\ W^{-1}$, unité égale à $cd\ sr\ W^{-1}$, ou $cd\ sr\ kg^{-1} m^{-2} s^{3}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *h*, *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.


Le système international d'unités
PRINCIPE
Le système international d'unités (SI) est un ensemble de grandeurs physiques qui permet de tout mesurer, de l'infiniment petit à l'infiniment grand. Il compte sept unités primaires, et leurs unités dérivées par « filiation ».
Masse. KILOGRAMME (kg)
1re définition en 1799, établie à partir d'un objet matériel : un étalon en alliage de platine et d'iridium.
Nouvelle définition (2018) basée sur la constante de Planck ($h$) dont la valeur est fixée à 6,626 070 15 × $10^{-34}$ J.s
$1\ kg = 1{,}475\,521\ldots \times 10^{40}\, h\, \Delta\nu_{Cs}/c^2$
Force. NEWTON (N) : $m{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
Pression. PASCAL (Pa) : $m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
Différence de potentiel électrique. VOLT (V) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}{\cdot}A^{-1}$
Énergie. JOULE (J) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
Puissance, flux énergétique. WATT (W) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}$
Longueur. MÈTRE (m)
1re définition en 1791, basée sur la circonférence de la terre (1 m = 10 millionièmes du méridien entre le pôle nord et l'équateur).
Définition actuelle (depuis 1983) basée sur la constante de la vitesse de la lumière dans le vide ($c$) égale à 299 792 458 $m{\cdot}s^{-1}$/s
$1\ m = 30{,}663\,319\ldots\, c/\Delta\nu_{Cs}$
Superficie. MÈTRE CARRÉ : $m^2$
Volume. MÈTRE CUBE : $m^3$
Angle plan. RADIAN (rad) : $m{\cdot}m^{-1}$
Angle solide. STÉRADIAN (sr) : $m^2{\cdot}m^{-2}$
Dose absorbée. GRAY (Gy) : $m^2{\cdot}s^{-2}$
Intensité lumineuse. CANDELA (cd)
1re définition en 1954, remplaçant l'unité de la bougie établie à 60 bougies par centimètre carré.
Définition actuelle (depuis 1979) basée sur la constante $K_{cd}$ : intensité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 × $10^{12}$ hertz (Hz), dont la valeur est 683.
$1\ cd = 2{,}614\,830\ldots \times 10^{10} (\Delta\nu_{Cs})^2\, h\, K_{cd}$
Flux lumineux. LUMEN (lm) : cd.sr = $m^2{\cdot}m^{-2}{\cdot}cd$
Éclairement lumineux. LUX (lx) : $lm{\cdot}m^{-2} = m^{-2}{\cdot}cd{\cdot}sr$
Quantité de matière. MOLE (mol)
1re définition en 1971, relative à la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires (atomes, ions, électrons, etc.) qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12.
Nouvelle définition (2018), à partir de la constante d'Avogadro ($N_A$) : nombre d'entités élémentaires dont la valeur est 6,022 140 76 × $10^{23}$ $mol^{-1}$
$1\ mol = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}/NA$
Concentration molaire. MOLE / MÈTRE CUBE : $mol{\cdot}m^{-3}$
Activité catalytique. KATAL (kat) : $mol{\cdot}s^{-1}$
Durée. SECONDE (s)
1re définition en 1889 fondée sur la durée du jour terrestre divisée en 24 h de 60 min de 60 s.
Définition actuelle (depuis 1967) basée sur une constante ($\Delta\nu$) : nombre (9 192 631 770) d'oscillations (exprimé en fréquence Hz) de l'atome de césium 133.
$1\ s = 9\,192\,631\,770/\Delta\nu_{Cs}$
Fréquence. HERTZ (Hz) : $s^{-1}$
Activité d'un radionucléide. BECQUEREL (Bq) : $s^{-1}$
Équivalent de dose. SIEVERT (Sv) : $m^2{\cdot}s^{-2}$
Dose absorbée. GRAY (Gy) : $m^2{\cdot}s^{-2}$
Intensité électrique. AMPÈRE (A)
1re définition en 1946 correspondant au transport d'une charge électrique d'1 coulomb par seconde (C/s) à travers une surface.
Nouvelle définition (2018) relative à la constante de la charge élémentaire de l'électron ou du proton ($e$) dont la valeur est 1,602 176 634 × $10^{-19}$ C.
$1\ A = 6{,}789\,687\ldots \times 10^8\, \Delta\nu_{Cs} \times e$
Charge électrique. COULOMB (C) : s·A
Différence du potentiel électrique. VOLT (V) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}{\cdot}A^{-1}$
Résistance électrique. OHM (Ω) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}{\cdot}A^{-2}$
Capacité électrique. FARAD (F) : $m^{-2}{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^4{\cdot}A^2$
Inductance électrique. HENRY (H) : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}{\cdot}A^{-2}$
Induction magnétique. TESLA (T) : $kg{\cdot}s^{-2}{\cdot}A^{-1}$
Température. KELVIN (K)
1re définition en 1954, correspondant au degré d'agitation des molécules basée sur une fraction de la température thermodynamique du point triple de l'eau (à la fois liquide, solide et gazeuse). 1 K = 1/273,16.
Nouvelle définition (2018) selon la constante de Boltzmann ($k$) dont la valeur est 1,380 649 × $10^{-23}$ $J.K^{-1}$.
$1\ K = 2{,}266\,665\ldots\, \Delta\nu_{Cs}\, h/k$
Température Celsius. DEGRÉ CELSIUS (°C) : T/K – 273,15
Conductivité thermique. WATT/ MÈTRE KELVIN : $m{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}{\cdot}K^{-1}$
Résistance thermique surfacique. MÈTRE CARRÉ KELVIN / WATT : $kg^{-1}{\cdot}s^3{\cdot}K$
Capacité thermique. JOULE / KELVIN : $m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}$
Dépendance de la définition d'une unité primaire (ici le kelvin) avec d'autres (ici la seconde et le kilogramme).
kelvin
NOTION CLÉ
Constantes fondamentales de la nature
Quantité physique dont la valeur numérique est fixe : invariable dans le temps et dans l'espace, et indépendante de tous les paramètres utilisés pour la mesurer.
yocto (y) $10^{-24}$
zepto (z) $10^{-21}$
atto (a) $10^{-18}$
femto (f) $10^{-15}$
pico (p) $10^{-12}$
nano (n) $10^{-9}$
micro (µ) $10^{-6}$
milli (m) $10^{-3}$
centi (c) $10^{-2}$
déci (d) $10^{-1}$
déca (da) $10^{1}$
hecto (h) $10^{2}$
kilo (k) $10^{3}$
méga (M) $10^{6}$
giga (G) $10^{9}$
téra (T) $10^{12}$
péta (P) $10^{15}$
exa (E) $10^{18}$
zetta (Z) $10^{21}$
yotta (Y) $10^{24}$
Les défis du CEA Décembre 2018 - Janvier 2019 N°233
Aurélien Boudault (infographie), Aude Ganier, en collaboration avec Alexandre Bounouh, chef de département au CEA-List

## I.4 Une très courte histoire de la définition des unités

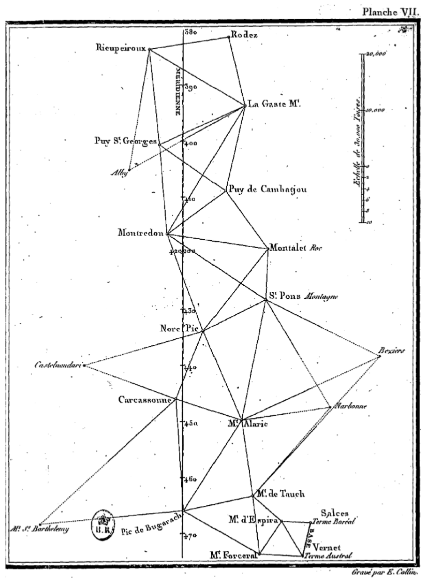
Le **mètre et le kilogramme** sont nés en France à la fin du XVIII^e siècle au moment de la Révolution. Jusque là il existait plus de 700 unités de mesure rien qu'en France, qui dépendait du lieu, de la profession, de la taille du pied du Roi, ... En 1789, dans les cahiers de doléance, il a été demandé qu'il n'y ait plus « **deux poids, deux mesures.** »




Le **mètre** a été la première unité à être définie, comme étant la **dix millionième partie du quart du méridien terrestre**. La mesure de l'arc de Dunkerque à Barcelone a été effectuée par triangulation par Jean-Baptiste DELAMBRE (de Dunkerque à Rodez) et par Pierre MÉCHAIN (de Barcelone à Rodez), qui partirent de Paris (jardin des Tuileries) en mai 1792 et revinrent en novembre 1798.


Jean-Baptiste DELAMBRE Pierre MÉCHAIN




L'unité de masse sera définie comme **la masse d'un décimètre cube d'eau distillée**.

Le **système métrique décimal** est créé **en 1795**, les deux étalons de platine sont déposés aux Archives de la République à Paris le 22 juin 1799. L'usage du système métrique devient obligatoire en France le **1^er janvier 1840**.

*À gauche : Le mètre étalon fabriqué en platine par Etienne Lenoir*

*À droite : Le kilogramme étalon fabriqué en platinepar Nicolas fortin*

En 1875, 17 pays signent la Convention du mètre qui instaure le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) au pavillon de Breteuil à Sèvres (Ile-de-France).

En 1889, la 1^re CGPM instaure les nouveaux prototypes du mètre et du kilogramme en platine iradié (90% Pt 10% Ir), et la seconde et fonde le système d'unités mécaniques MKS.

En 1948, la 9e CGPM adopte la définition de l'**ampère** comme étant **l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2.10^{-7}$ newton par mètre de longueur**. L'ampère est pris comme unité fondamentale aux côtés du mètre, du kilogramme et de la seconde, ce qui constitue le système MKSA.

En 1960, la 11e CGPM définit le **mètre** comme **la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86**.

L'unité de temps de la **seconde** a été définie à l'origine comme la fraction de 1/86 400 du jour solaire moyen. Pour plus de précision, la 11e CGPM en 1960 approuve la nouvelle définition proposée par l'Union astronomique internationale : **c'est la fraction 1/31 556 925,9747 de l'année tropique 1900** (l'intervalle de temps, sur Terre, pour que le Soleil retourne à la même position dans le cycle des saisons).
**En 1967**, la 13e CGPM considère que la définition de la **seconde** précédente ne suffit pas aux besoins de la métrologie et remplace la définition alors en vigueur par une définition atomique : La **seconde** est **la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133**.

**En 1983**, le **mètre** est redéfini par la 17e CGPM : **le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde**. Il n'y a plus qu'un seul étalon pour les longueurs et les temps / fréquences : l'horloge à césium.


**En 2019**, **le kilogramme, l'ampère, la mole et le kelvin sont redéfinis**.
Le CIPM a recommandé à la 26e CGPM d'adopter les valeurs de la constante de Planck, la charge élémentaire, la constante de Boltzmann et la constante d'Avogadro obtenus à partir des résultats de l'ajustement des constantes fondamentales réalisé en 2017, afin de redéfinir les 4 unités.

Jusqu'en 2019, le **kilogramme (kg)** était l'unité de masse égal à la masse du prototype international du kilogramme ($\mathscr{K}$), c'était la seule unité encore définie à l'aide d'un artefact matériel. En 2019, il a été **redéfini en fixant la valeur d'une constante de la physique : la constante de Planck $h$**.

Jusqu'en 2019, le **kelvin (K)**, unité de température thermodynamique étant défini comme la fraction de 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. En 2019, il a été **redéfini en attribuant une valeur fixée à la constante de Boltzmann $k_B$**.

Jusqu'en 2019, la **mole (mol)** était définie comme étant la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. En 2019, elle est **redéfinie comme la quantité de matière associée à $\mathscr{N}_\mathscr{A}$ entités élémentaires, où la constante d'Avogadro $\mathscr{N}_\mathscr{A}$ a une valeur fixée**.

En 2019, l'**ampère (A)** est **redéfini en attribuant une valeur fixée à la charge élémentaire $e$**.

Pour la dernière unité du système international, le **candela (cd)** est défini, **depuis 1979**, comme étant **l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540.10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian**.

## II Équation aux dimensions

**Définition : Équation aux dimensions**

On appelle **équation aux dimensions** l'écriture de la dimension d'une grandeur physique en fonction des sept dimensions de base du SI :

$$\dim(G) = L^a M^b T^c I^d \Theta^f N^g J^h$$

**Exemple 1.**

— Si $G$ a la dimension d'une longueur, on notera : $\dim(G) = L$

— Si la grandeur $G$ est sans dimension (on dit qu'elle est **adimensionnée**), on notera $\dim(G) = 1$.
*Exemple :* Un angle est défini comme le rapport de la longueur de la corde (une longueur) divisée par le rayon du cercle (une longueur) : $\dim(\theta) = \dim\left(\dfrac{\ell}{R}\right) = \dfrac{\dim(\ell)}{\dim(R)} = \dfrac{L}{L} = 1$

**Méthode : Comment établir une équation aux dimensions ?**

1. Exprimer la grandeur dont on cherche la dimension à l'aide d'une formule simple, de la définition, ... ;
2. Exprimer les dimensions des grandeurs intervenants dans la formule précédente à l'aide des 7 dimensions de base ;
3. Conclure sur la dimension de la grandeur recherchée.

**Exercice de cours A**

Q1. Établir la dimension d'une force.

Q2. Établir la dimension, puis l'unité dans le système international du champ de pesanteur terrestre $g$.

Q3. Établir la dimension de l'énergie cinétique.

Q4. Établir la dimension, puis l'unité en fonction des 7 unités de base du SI, d'une puissance. Quelle est l'unité usuelle de la puissance ?

Q5. Établir la dimension, puis l'unité en fonction des 7 unités de base du SI, d'une pression. Quelle est l'unité usuelle de la pression ?

## III Homogénéité d'une expression

**À retenir**

Une équation/expression doit toujours être homogène.

- les deux membres de l'égalité $A = B$ ont même dimension, c'est-à-dire $\dim(A) = \dim(B)$ ;
- les termes d'une somme ou d'une différence ot même dimension (on n'ajoute pas des distances avec des masses) ;
- l'argument $x$ des fonctions mathématiques ($e^x$, $\cos(x)$, $\ln(x)$ ...) est toujours sans dimension, ces fonctions sont elles-mêmes sans dimension ;
- les deux membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence sont de la même nature scalaire/-vectorielle $\overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$ ; scalaire=scalaire

## Méthode

Vous devez prendre l'habitude de CONTRÔLER L'HOMOGÉNÉITÉ DE TOUTES LES RELATIONS LITTÉRALES, avant l'application numérique, c'est-à-dire en l'absence de toute valeur numérique.

## Attention

Une expression **non homogène** est **nécessairement fausse**.
Une expression homogène peut être fausse, mais l'erreur de calcul sera plus excusable.

### Exercice de cours B

Contrôler l'homogénéité des expressions suivantes. Pour cela, étudier la dimension de chaque terme des sommes/différences et de part et d'autre du signe égal, puis conclure.

Q1. $c = \lambda T$, avec $c$ la célérité de l'onde, $\lambda$ la longueur d'onde et $T$ la période.

- $\dim(c) =$ ....................
- $\dim(\lambda T) = \dim(\lambda) \times \dim(T) =$ .......... $\times$ ............

Donc $\dim(c)$....... $\dim(\lambda T)$, donc l'équation ......................... homogène

Q2. Position d'un point au cours d'une chute libre : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0}{t} + z_0$, avec $g$ le champ de pesanteur, $v_0$ la vitesse initiale et $z_0$ l'altitude initiale.

- $\dim(z) =$ ....................
- $\dim\left(\frac{1}{2}gt^2\right) =$ ......................................
- $\dim\left(\frac{v_0}{t}\right) =$ .........................
- $\dim(z_0) =$ .....................

Donc ...................................................., donc l'équation ......................... homogène

Q3. $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = F \times v$, avec $\mathscr{E}_c$ l'énergie cinétique, $F$ une force et $v$ une vitesse.

- $\dim(\mathscr{E}_c) =$ ...................., donc $\dim\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\text{...............}}{\text{................}} =$ .......................
- $\dim(F \times v) =$ ..............................

Donc $\dim\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right)$........ $\dim(F \times v)$, donc l'équation ......................... homogène.

Q4. On note $R$ la résistance électrique équivalente à deux résistances $R_1$ et $R_2$ en dérivation. La relation $R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ peut-elle être juste ?

Q5. L'expression $u_c(t) = Ee^{-t/\tau}$ où $E$ et $u_c$ sont des tensions électriques et $t$ un temps, est homogène à condition que $\tau$ soit homogène à .................................

Q6. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = E$, où $u$ et $E$ sont des tensions et $t$ et $\tau$ des temps, peut-elle être homogène ?

Q7. $F = mg(1 + t)$, où $F$ est une force, $m$ une masse, $g$ le champ de pesanteur terrestre, $t$ un temps, peut-elle être homogène ?

# IV Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de contrôler l'homogénéité d'une expression, elle permet également de déterminer ou retrouver l'expression d'une grandeur.
Une grandeur X susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs $A$, $B$ et $C$ caractéristiques du problème et dimensionnellement indépendantes, peut très souvent se mettre sous la forme :

$$X = k \times A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}$$

où $k$ est un nombre sans dimension, et où les exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle.

**Méthode : Comment déterminer une relation par analyse dimensionnelle ?**

1. Identifier les grandeurs $A$, $B$, $C$ caractéristiques du problème étudié dont peut dépendre la grandeur $X$ recherchée.
2. Exprimer la grandeur recherchée sous la forme
$$X = k \times A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}$$
avec $k$ est un nombre sans dimension.
3. Écrire l'équation aux dimensions
$$\dim(X) = \dim(A)^{\alpha} \times \dim(B)^{\beta} \times \dim(C)^{\gamma}$$
4. Exprimer les dimensions de $A$, $B$, $C$ et $X$ **en fonction des 7 dimensions de base du SI.**
5. En égalisant les exposants de chaque dimension de base du SI présents à gauche et à droite, établir le système d'équations vérifié par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et le résoudre.
6. Conclure sur l'expression de $X$.

### Exercice de cours C Période du pendule simple

Un pendule est constitué d'une ficelle de longueur $\ell$ à laquelle est attachée une masse $m$. La ficelle est fixée au plafond et la masse est supposée osciller sans frottement dans le champ de pesanteur terrestre d'intensité $g$.

Q1. Quels sont les paramètres pertinents du problème ?

Q2. Exprimer la grandeur recherchée en fonction des paramètres identifiés précédemment et d'exposants.

Q3. Après avoir déterminé les dimensions des différentes grandeurs, écrire l'équation aux dimensions.

Q4. En déduire le système d'équations vérifié par les exposants introduits précédemment.

Q5. Conclusion sur l'expression de $T$.