Lundi 25 septembre 2023

Devoir Surveillé n°1 – *Corrigé*

Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS ! ! ! !
- Commencer les réponses par une PHRASE qui NE commence PAS par donc, parce que, oui, non, du coup...
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- ENCADRER l'expression LITTÉRALE FINALE.

Exercice n°1 Tracés et relations de conjugaison ($\sim$ 30 min)

R1. Énoncer les relations de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton.

Solution: Pour un objet AB transverse avec A situé sur l'axe optique conjugué avec l'image $A'B'$ par une lentille mince de centre optique O, de foyer principal objet F, de foyer principal image F' et de distance focale f' : $A \xrightarrow{\mathscr{L}(O,f')} A'$

Relations	. . . de conjugaison	. . . de grandissement
. . . avec origine au centre (de Descartes)	$\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$	$\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
. . . avec origine aux foyers (de Newton)	$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2$	$\gamma = \dfrac{\overline{F'A'}}{-f'} = \dfrac{f'}{\overline{FA}}$

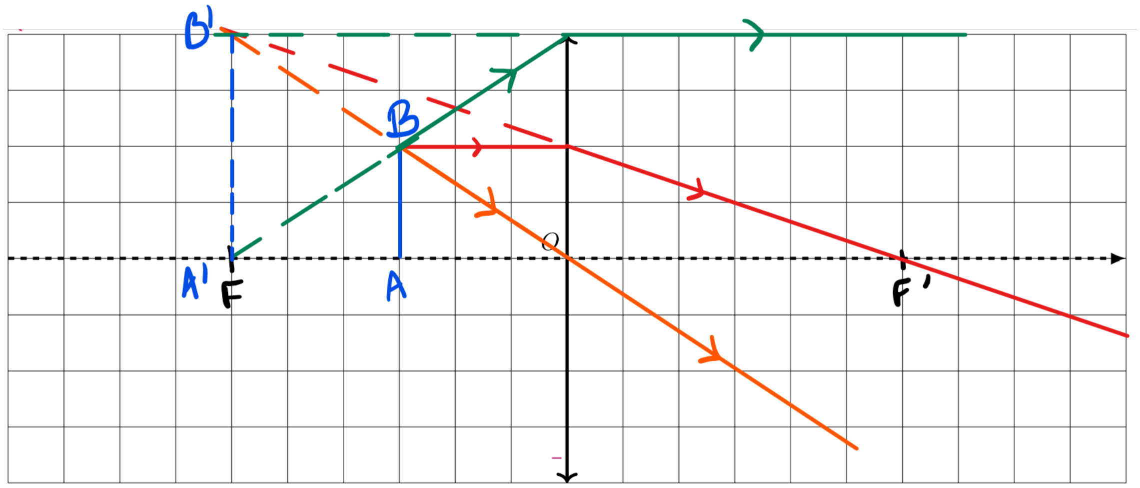
On considère une lentille convergente de distance focale $f' = 6,0$ cm.
On place un objet AB, avec A sur l'axe optique, de 2,0 cm de haut à 3,0 cm du foyer principal objet, entre le foyer principal objet et la lentille.

R2. Déterminer la position de l'image, ainsi que le grandissement.
Quelle est la nature réelle ou virtuelle de l'image ? Que peut-on dire de l'image par rapport à l'objet ?

Solution: D'après l'énoncé : $\overline{FA} = +3$ cm
D'après la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$
Ainsi $\boxed{\overline{F'A'} = -\dfrac{f'^2}{\overline{FA}}}$ A.N. $\underline{\overline{F'A'} = -12 \text{ cm}}$
Ainsi $\overline{OA} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = f' + \overline{F'A'} = -6 \text{ cm} < 0$: l'image est virtuelle.
D'après la relation de grandissement : $\boxed{\gamma = \dfrac{-\overline{F'A'}}{f'}} \underline{= 2 > 0}$: l'image est agrandie et de même sens que l'objet.

R3. Sur le **document réponse à rendre avec votre copie**, à l'échelle, placer l'objet AB, placer les deux foyers principaux F et F', et tracer les trois rayons particuliers. Vérifier la cohérence avec le calcul précédent.

Solution: ⚠ LECTURE de l'énoncé : AB est RÉEL et entre F et O.



Étudier vraiment la cohérence.
L'image est bien située 6 cm avant la lentille, et est deux fois plus grande que l'objet et de même sens. C'est cohérent avec le calcul précédent.

On considère une lentille divergente de distance focale $f' = -6,0$ cm.
On place un objet réel AB, avec A sur l'axe optique, de 2,0 cm de haut à 2,0 cm de la lentille.

R4. Déterminer la position de l'image, ainsi que le grandissement.
Quelle est la nature réelle ou virtuelle de l'image ? Que peut-on dire de l'image par rapport à l'objet ?

Solution: L'objet est RÉEL et donc situé AVANT la lentille.
D'après l'énoncé : $\overline{OA} = -2$ cm < 0, car l'objet est réel.

D'après la relation de conjugaison de Descartes : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$, soit $\boxed{\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA} \times f'}{\overline{OA} + f'}}$

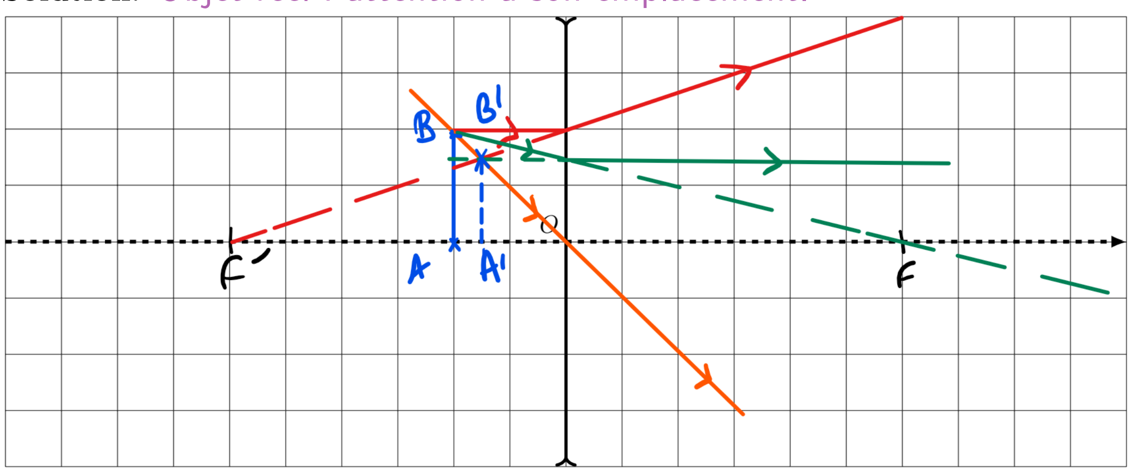
A.N. : $\underline{\overline{OA'} = \dfrac{-2 \times (-6)}{-2-6} = -1,5 \text{ cm} < 0}$ L'image est virtuelle.

Grandissement : $\underline{\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} = 0,75}$

L'image est donc plus petite que l'objet et de même sens.

R5. Sur le **document réponse à rendre avec votre copie**, à l'échelle, placer l'objet AB, placer les deux foyers principaux F et F', et tracer les trois rayons particuliers. Vérifier la cohérence avec le calcul précédent.

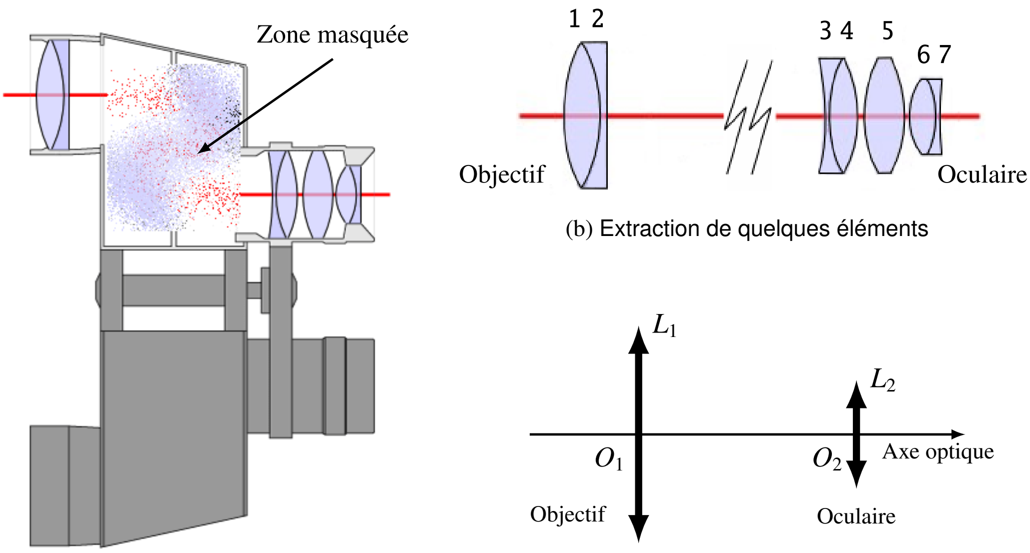
Solution: Objet réel : attention à son emplacement.



L'image est bien de $0,75 \times 2$ cm $= 1,5$ cm et située à 1,5cm avant la lentille.

Exercice n°2 Étude d'une paire de jumelle ($\sim$ 45 min)

Ce problème étudie une paire de jumelles. Démontée (voir figure 1), la paire de jumelles se trouve être constituée d'éléments optiques assez simples : des lentilles convergentes et divergentes ainsi que des prismes dans la zone masquée.



(a) La paire de jumelles désassemblée

(b) Extraction de quelques éléments

(c) Modélisation des éléments extraits : lunette équivalente

FIGURE 1 – la parie de jumelles et sa modélisation

On s'intéresse, en premier lieu, aux groupes de lentilles (extraites de l'ensemble sur la figure 1b) que nous modéliserons, en entrée et en sortie, par des lentilles minces convergentes. La modélisation est présentée en figure 1c. On note f_1' et O_1 (respectivement f_2' et O_2) la distance focale image et le centre de l'objectif (respectivement de l'oculaire).

Dans tout le problème, on suppose que $f_2' = u$ et $f_1' = 7f_2' = 7u$ où u est une longueur de référence.

R6. Identifier, par leur numéro, les lentilles minces divergentes visibles sur la figure 1b.

> **Solution:** Les lentilles divergentes sont plus épaisses aux bords, les lentilles 2,3 et 7 sont divergentes.

R7. Proposer une méthode de détermination rapide du caractère convergent ou divergent d'une lentille ne portant aucune indication.

> **Solution:** On regarde à travers la lentille inconnue un texte situé à proximité de la lentille : si l'image est agrandie, la lentille est convergente, si l'image est plus petite, la lentille est divergente.

R8. Ces lentilles sont utilisées dans les conditions de l'approximation de Gauss.
Quelles sont ces conditions ? Quelles conséquences en découlent si elles sont respectées ?

> **Solution:** Les rayons qui frappent les lentilles doivent être paraxiaux, c'est-à-dire peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu éloignés de l'axe optique. Cela permet d'obtenir un stigmatisme approché : les rayons issus d'un point se croisent après la lentille dans une zone de l'espace de taille inférieure à celle d'une cellule du capteur.

R9. La lunette équivalente est réglée de manière à constituer un système afocal : l'image d'un objet à l'infini par la lunette équivalente se forme à l'infini.
Quel avantage présente ce réglage pour un être humain ?

Comment doivent être placer le foyer principal image de l'objectif par rapport au foyer principal objet de l'oculaire ? *(La réponse devra être justifiée !)*

Solution: La paire de jumelle est utilisée pour observer un objet à l'infini. Obtenir une image à l'infini permet pour un œil emmétrope d'observer l'image sans fatigue, sans accommodation.

L'objet est à l'infini, l'image intermédiaire par l'objectif se forme dans le plan focal image de l'objectif.

L'image finale doit se former à l'infini, pour cela l'image intermédiaire, qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire, doit se former dans le plan focal objet de l'oculaire.

Par conséquent le plan focal image de l'objectif et le plan focal objet de l'oculaire sont confondus.

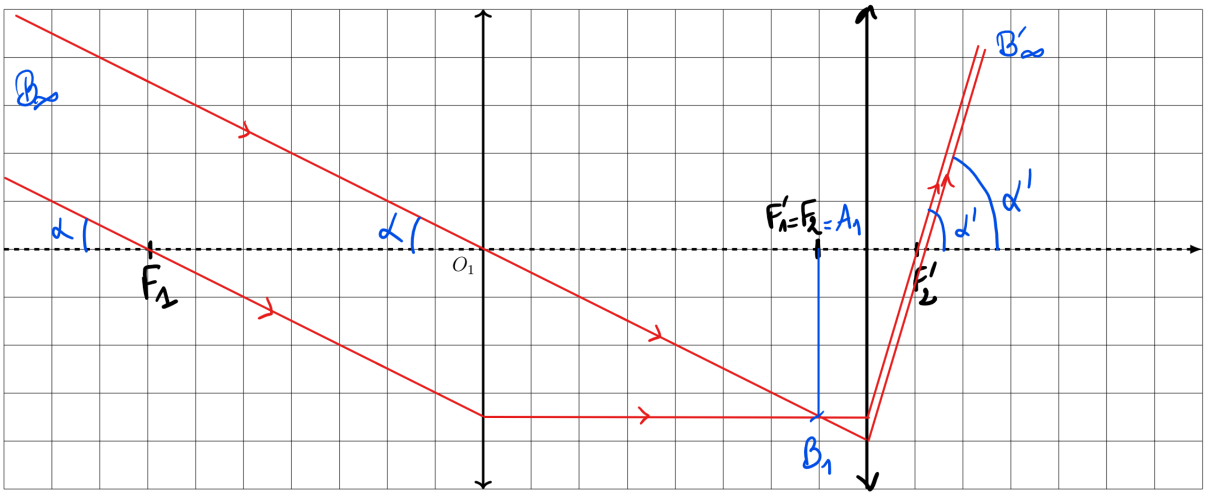
R10. Représenter sur le **document réponse à rendre avec votre copie**, à l'échelle, la lunette équivalente afocale (l'objectif est déjà placé) ; on prendra, pour simplifier la construction, $u = 1$ cm.

Tous les foyers doivent être positionnés et visibles, les orientations précisées.

Dessiner le trajet de deux rayons lumineux arrivant, de l'infini, sur l'objectif et inclinés d'un angle α par rapport l'axe optique.

On notera α' l'angle, par rapport à l'axe optique, du rayon correspondant émergeant de l'oculaire.

Solution: Tout rayon commencé doit être terminé complètement : aucun rayon ne doit disparaître au milieu du tracé !



R11. Exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\alpha')$ en fonction de la taille de l'image intermédiaire, f_1' ou f_2'.

Solution: Dans le triangle rectangle $O_1A_1B_1$: $\boxed{\tan(\alpha) = \dfrac{A_1B_1}{f_1'}}$

Dans le triangle rectangle $O_2F_2'H$: $\boxed{\tan(\alpha') = \dfrac{O_2H}{f_2'} = \dfrac{A_1B_1}{f_2'}}$

R12. En déduire l'expression algébrique du grossissement, noté G défini par $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$, en fonction de f_1' et f_2'.

On utilisera l'approximation des petits angles.

Évaluer numériquement G.

Solution: Dans le cadre des petits angles, $\dfrac{A_1B_1}{f_1'} = \tan(\alpha) \approx \alpha$ et $\dfrac{A_1B_1}{f_2'} = \tan(\alpha') \approx \alpha'$

Ainsi $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} \approx \dfrac{\dfrac{A_1B_1}{f_2'}}{\dfrac{A_1B_1}{f_1'}}$

Soit $\boxed{G = \dfrac{f'_1}{f'_2}}$ A.N. $G = \dfrac{7u}{u} = 7$.

Exercice n°3 Réfractomètre de Pulfrich ($\sim$ 45 min)

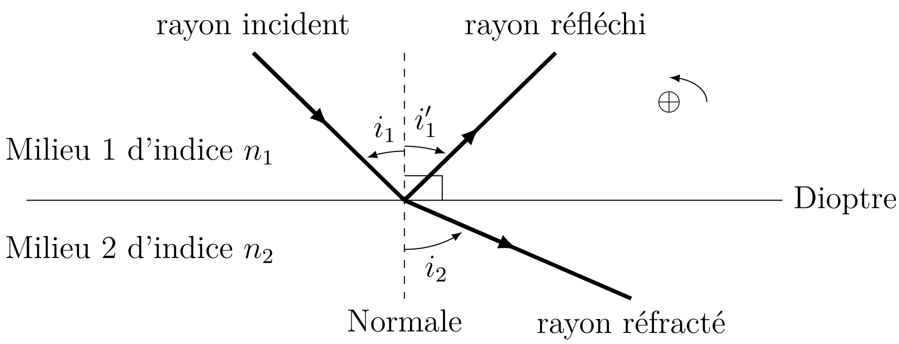
Le réfractomètre de Pulfrich (voir figure **??**) est un dispositif optique qui permet de mesurer l'indice de réfraction n d'un liquide.

Ce réfractomètre de précision fut conçu en 1888 par Carl Pulfrich, et distribué par Max Wolz à Bonn. Une évolution fut commercialisée en 1895, après que Pulfrich eut rejoint Carl Zeiss. Dans les années 1930, Zeiss en a sorti une version améliorée.

Il est composé d'un cube de verre, d'indice de réfraction n_0 connu, sur lequel on dépose une goutte (supposée hémisphérique) du liquide d'indice à déterminer. Lorsque de la lumière issue de la goutte liquide pénètre dans le bloc par la face horizontale, l'observation des rayons émergeant du cube (sous certaines conditions à étudier) permet d'accéder à l'indice n cherché.

R13. Rappeler les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et pour la réfraction. *Les lois seront énoncées totalement et seront accompagnées d'un schéma complet.*

Solution: TOUTE LES LOIS DOIVENT ÊTRE DONNÉS dans une telle question ! N'oubliez pas les premiers points.
En donnant $i'_1 = -i_1$, cela suppose des angles orientés, ils doivent donc en être ainsi sur le schéma.



Loi de la réflexion

1) Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au point d'incidence.

2) L'angle d'incidence i_1 et l'angle de réflexion i'_1 ont des valeurs égales mais opposées :

$$i'_1 = -i_1$$

Loi de la réfraction

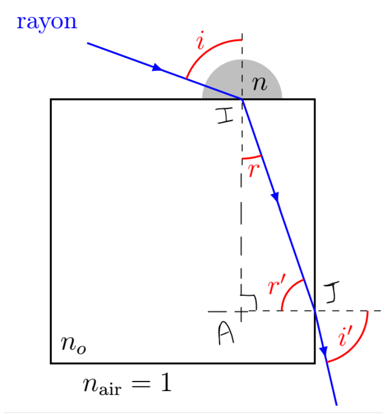
1) Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au point d'incidence.

2) L'angle d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont reliés par la relation suivante :

$$n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$$

R14. Exprimer l'angle r en fonction de n, n_0 et i, et l'angle r' en fonction de n_0 et i'.

Solution: Un SCHÉMA complété est INDISPENSABLE.



D'après la loi de Snell-Descartes :

— au niveau du dioptre liquide/bloc : $n\sin(i) = n_0\sin(r)$

— au niveau du dioptre bloc/air : $n_0\sin(r') = \sin(i')$

R15. Quelle relation (simple) existe entre r et r' ?

Solution: Dans le triangle IJA rectangle, la somme des angles vaut π : $r' + r + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \boxed{r' = \frac{\pi}{2} - r}$

R16. Qu'est-ce que le phénomène de réflexion totale ?

Solution: Lorsqu'un rayon parvient sur un dioptre, il donne naissance à un rayon réfracté et un rayon réfléchi. Dans des conditions particulières, il n'existe pas de rayon réfracté, et la **totalité de l'énergie lumineuse incidente se retrouve dans le rayon réfléchi**.

R17. Pourquoi peut-il se produire le phénomène de réflexion totale en sortie du bloc ?
Quelle condition sur les indices n_0 du cube et n de la goutte doit être vérifiée pour être certain que le rayon puisse entrer dans le cube ?

Solution: En sortie du bloc, le rayon passe du bloc à l'air qui est moins réfringent.
Sur le dioptre liquide/bloc, si on veut être certain que le rayon entre dans le cube, il ne faut pas que puisse se produire le phénomène de réflexion totale, pour cela, il faut que $n_0 > n$.

R18. Déterminer l'angle r'_{lim} limite de réflexion totale en sortie du bloc.

Solution: À la limite de la réflexion totale, $i' = \frac{\pi}{2}$, alors d'après la relation de Snell-Descartes : $n_0\sin(r'_{\text{lim}}) = \sin(\pi/2)$, soit $\boxed{r'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$

R19. Donner l'inégalité que doit vérifier r', en fonction de n_0, pour qu'un rayon puisse sortir du cube.
En déduire l'inégalité que doit vérifier r, pour qu'un rayon puisse sortir du cube.

Solution: Un rayon peut sortir du cube si $r' < r'_{\text{lim}}$, soit

$$\begin{aligned} r' &< \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right) \\ \frac{\pi}{2} - r &< \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right) \end{aligned}$$

Ainsi le rayon peut sortir du cube à condition que $\boxed{r > \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n_0}\right)}$

R20. En déduire qu'un rayon peut sortir du cube à condition que

$$\sin(r) > \sqrt{1 - \frac{1}{n_0^2}}$$

Solution: D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} r &> \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right) \\ \sin(r) &> \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right)\right) \\ \sin(r) &> \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\sin(r) > \sqrt{1 - \dfrac{1}{n_0^2}}}$

R21. En déduire qu'un rayon peut sortir du réfractomètre à condition que l'angle d'incidence i soit supérieur à une valeur minimale i_m définie par

$$\sin(i_m) = \frac{1}{n}\sqrt{n_0^2 - 1}$$

Solution: D'après la question précédente, un rayon sort à condition :

$$\begin{aligned} \sin(r) &> \sqrt{1 - \frac{1}{n_0^2}} \\ n_0 \sin(r) &> n_0\sqrt{1 - \frac{1}{n_0^2}} \\ n_0 \sin(r) &> \sqrt{n_0^2 - 1} \\ n \sin(i) &> \sqrt{n_0^2 - 1} \\ \sin(i) &> \frac{\sqrt{n_0^2 - 1}}{n} \end{aligned}$$

Pour qu'un rayon puisse sortir du réfractomètre, il faut que i soit supérieur à l'angle i_m avec $\boxed{\sin(i_m) = \dfrac{1}{n}\sqrt{n_0^2 - 1}}$

R22. Comment pourrait-on procéder expérimentalement pour mesurer n ?

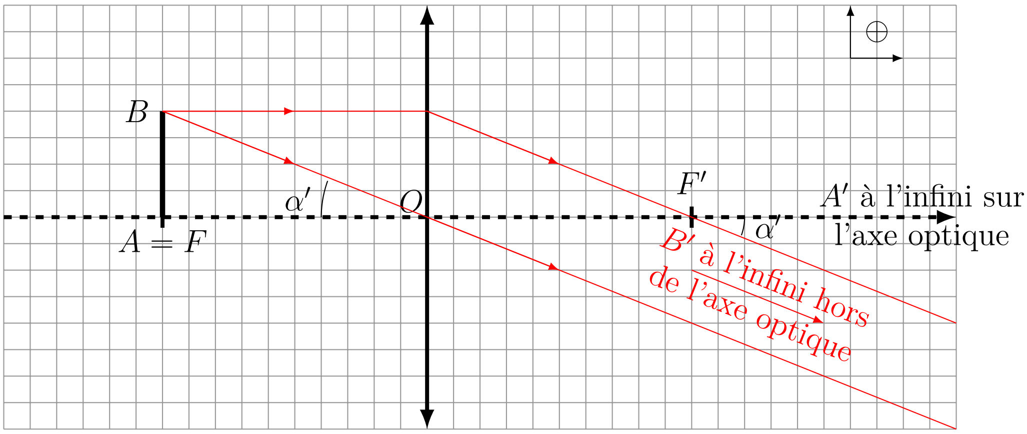
Solution: On envoie un rayon lumineux sur la goutte en faisant varier i, on place en sortie du cube un détecteur : quand i est faible, le faisceau est totalement réfléchi, et le détecteur ne capte rien. Au-delà de i_m, le rayon est transmis, et le détecteur capte le faisceau lumineux. Une fois i_m mesuré, on peut remonter à n, connaissant n_0.

Exercice n°4 Loupe

Vous souhaitez utiliser une loupe pour agrandir un texte. Vous placez votre œil dans le foyer principal image de la lentille.

R23. Déterminer les caractéristiques de la lentille à utiliser pour grossir le texte trois fois, lors d'une observation sans fatigue.

Solution: Lors d'une observation sans fatigue, l'image du texte doit se former à l'infini, pour cela le texte doit se trouver dans le plan focal objet de la lentille.



On utilise le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$, où α est l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu observé au punctum proximum ($d_m = 25$ cm).

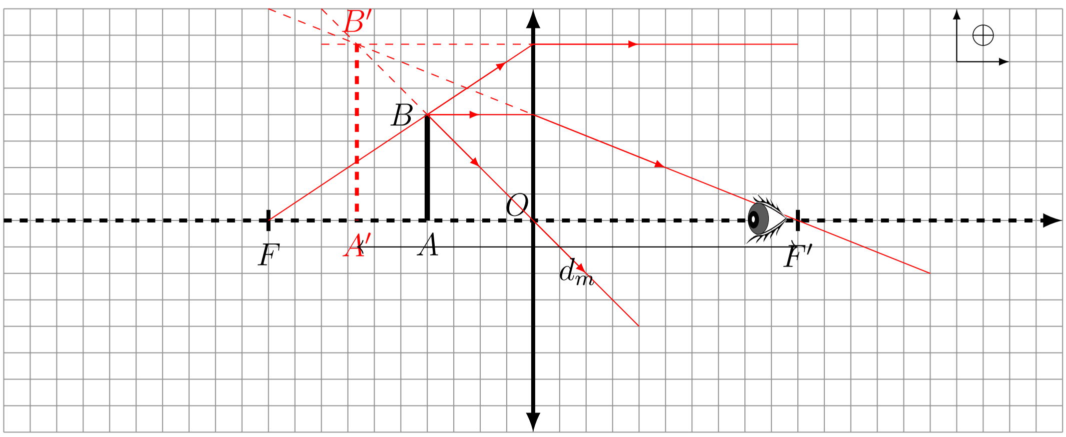
$\tan(\alpha') = \dfrac{AB}{f'}$ et $\tan(\alpha) = \dfrac{AB}{d_m}$

Avec l'approximation des petits angles, on obtient : $\boxed{G = \dfrac{d_m}{f'} = V d_m}$

On souhaite avoir $G = 3$, il faut donc $\boxed{f' = \dfrac{d_m}{G} = 8,3 \text{ cm}}$

R24. Déterminer la position de l'objet vous permettant de voir l'image nette en accommodant au maximum.

Solution: L'image est vue nette en accommodant au maximum, si elle est forme à la distance d_m de l'œil, au punctum proximum.



D'après la relation de conjugaison $\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$, avec $\overline{F'A'} = -d_m$

Ainsi : $\boxed{\overline{FA} = \dfrac{f'^2}{d_m} = \dfrac{d_m}{G^2}}$ A.N. : $\overline{FA} = \dfrac{25}{3^2} \approx 2,8$ cm

R25. Déterminer le grandissement dans le cas où vous accommodez au maximum.

Solution: D'après la relation de grandissement de Newton : $\boxed{\gamma = \dfrac{-\overline{F'A'}}{f'} = \dfrac{d_m}{f'} = 3}$