? À rendre le mercredi 5 octobre 2022

Devoir Maison n°4 — *Corrigé*

Évaluation :

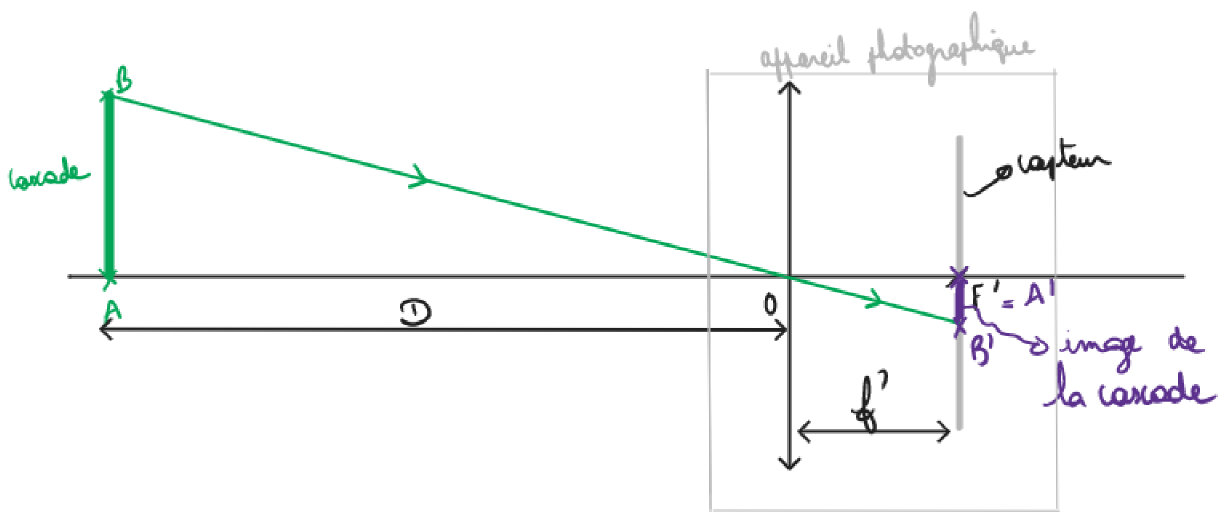
Compétences	**oui**	**non**
Exploiter les formules de conjugaison.		
Modéliser un appareil photo.		
Connaître et utiliser la loi d'Ohm.		
Connaître et utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds.		
Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.		
Exprimer la puissance reçue / fournie / dissipée par effet Joule.		
Les réponses s'appuient sur des **schémas** grands, clairs et complétés.		
Chaque calcul, et étape de calcul est introduit par une **phrase**, le nom de la **loi** utilisée, ...		
Les réponses sont **justifiées**.		
Les **calculs** sont menés **littéralement**.		
Les résultats littéraux sont **encadrés**.		
Les **applications numériques** ont une **unité** et sont **soulignées**.		

Exercice 1 Hauteur d'une chute d'eau

Cet exercice est une **résolution de problème** (cf document distribué en début d'année pour la méthode). On attend de vous une prise d'initiative quant à sa résolution.

Compétences	**Capacités associées**	**A/B/C**
S'**approprier** le problème.	-Faire un schéma modèle. -Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. -Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées. -Relier le problème à une situation modèle connue.	
Analyser. Établir une stratégie de résolution	-Décomposer le problème en des problèmes plus simples. -Expliciter la modélisation choisie (définition du système, ...). -Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.	
Réaliser. Mettre en œuvre la stratégie.	-Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. -Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique.	
Valider.	-S'assurer que l'on a répondu à la question posée. - Avoir un regard critique sur les résultats obtenus.	
Communiquer	-Présenter la solution ou la rédiger, en en expliquant le raisonnement et les résultats.	

Solution: On modélise la situation ci-dessous :



- On détermine la distance D entre la cascade et le photographe sur la vue satellite : $D = 1,36.10^3$ m
  Cette distance est très grande devant la distance focale de la lentille, on peut donc considérer la cascade à l'infini, et donc que son image se forme dans le plan focal image de la l'objectif.
- À partir de la photographie de la cascade et de la taille du capteur (14,9 mm de haut), nous pouvons déterminer la hauteur de l'image de la cascade sur le capteur : $A'B' = 10$ mm
- Par le théorème de Thalès (ou une relation de grandissement) : $\dfrac{A'B'}{f'} = \dfrac{AB}{D}$

  Soit $\boxed{AB = A'B' \times \dfrac{D}{f'} = 101 \text{ m}}$

Exercice 2 Fonctionnement électrique d'un TGV

Le mardi 3 avril 2007, à 13h14, la SNCF, associée à la compagnie ALSTOM, portait le record du monde de vitesse sur rail à la valeur $574,8$ km $\cdot$ h^{-1} au point kilométrique 194 de la ligne à grande vitesse est-européenne. Lors du record de vitesse, la puissance des moteurs était augmentée par rapport aux moteurs habituels et la tension d'alimentation en sortie des sous-stations avait été montée exceptionnellement à $E = 31,2$ kV sur la zone du record à la place des 25 kV habituels. Au moment du record, l'intensité électrique reçue au pantographe a été mesurée : elle était de $I_0 = 800$ A.

Pour l'étude qui va suivre, on s'intéresse au trajet du train entre deux sous-stations. On supposera que la section transverse de la caténaire (surface transversale du fil) est de $s = 1,47$ cm^2. La caténaire est en cuivre, métal dont la conductivité est de $\sigma = 5,82.10^7\ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le rail rectiligne est confondu avec l'axe (Ox) dont l'origine O $(x = 0)$ est placée au niveau de la sous-station à gauche sur le schéma. La variable $x \in [0, \ell]$ repère à tout instant la position de la locomotive entre les deux sous-stations d'alimentation (voir le schéma en début d'énoncé).

Une longueur ℓ de rail est équivalente à un conducteur ohmique de résistance $R = \dfrac{\ell}{\sigma s}$.

Nous allons chercher tout d'abord à justifier que le rail peut être modélisé par un simple fil de résistance nulle.

R1. Évaluer approximativement la surface de section s_{rail} d'un rail de chemin de fer, en cm^2.

> **Solution:** La surface de section s_{rail} d'un rail de chemin de fer, peut être évaluée à $s_{\text{rail}} \approx 50$ cm^2 (rail de taille 10 cm de haut pour 5 cm de large).

R2. En considérant que le rail est fait du même métal que la caténaire (donc même valeur de conductivité), justifier que l'on puisse négliger la résistance du rail devant celle de la caténaire (que l'on notera R dans la suite).

> **Solution:** Comparons la résistance d'un rail, donnée par $R_{\text{rail}} = \dfrac{\ell}{s_{\text{rail}} \times \sigma}$ et celle d'une caténaire, de même longueur ℓ, donnée par $R = \dfrac{\ell}{s \times \sigma}$, or $s = 1,87$ cm$^2 \approx \dfrac{s_{\text{rail}}}{40}$
> Ainsi, la résistance d'une caténaire est environ 40 fois plus élevée que celle des rails, donc nous pourrons négliger la résistance des rails dans la suite.

R3. Déterminer la résistance totale R de la caténaire entre les deux sous-stations considérées et effectuer l'application numérique.

> **Solution:** Entre deux sous-stations, la distance est de $\ell = 60$ km, ainsi la résistance totale de la caténaire entre deux sous-stations vaut $\boxed{R = \dfrac{\ell}{\sigma \times s} = 7,0\ \Omega}$

ATTENTION à bien convertir s en m^2 : $s = 1,47$ cm$^2 = 1,47.10^{-4}$ m^2 et ℓ en mètres.

R4. Donner l'expression de la résistance R_1 de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de gauche. On exprimera d'abord R_1 en fonction de σ, s et x et/ou ℓ, puis on réexprimera le résultat en fonction de R, ℓ et x (on rappelle que R désigne la résistance totale de la caténaire entre les deux sous-stations).

Solution: En amont de la locomotive, la caténaire est de longueur x, ainsi $\boxed{R_1 = \dfrac{x}{\sigma s}}$, avec, d'après la question précédent $\sigma s = \dfrac{\ell}{R}$

On en déduit : $\boxed{R_1 = R\dfrac{x}{\ell}}$

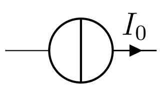
R5. Même question pour R_2, résistance électrique de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de droite, que l'on réexprimera en fonction de R, ℓ et x.

Solution: Pour R_2, on peut le faire de deux façons :

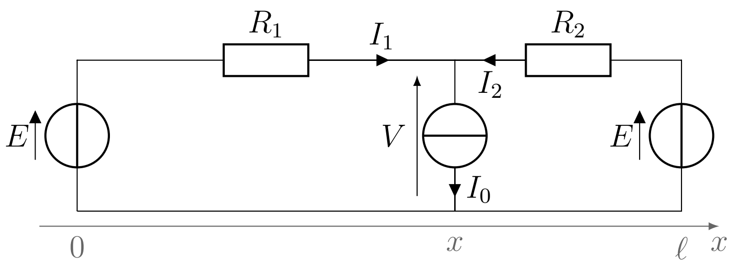
— La résistance en aval est égale à la résistance totale moins la résistance en amont : $\boxed{R_2 = R - R_1 = R\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right)}$

— En aval, la longueur de la caténaire est $\ell - x$, ainsi $R_2 = \dfrac{\ell - x}{\sigma s}$, avec $\sigma s = \dfrac{\ell}{R}$, on en déduit $R_2 = R\dfrac{\ell - x}{\ell}$

Le système électro-mécanique étudié est donc équivalent au circuit électrique ci-contre.

Remarque : le composant noté 

est un générateur idéal de courant, c'est-à-dire qu'il impose le courant I_0 dans sa branche quelle que soit la tension à laquelle il est soumis.

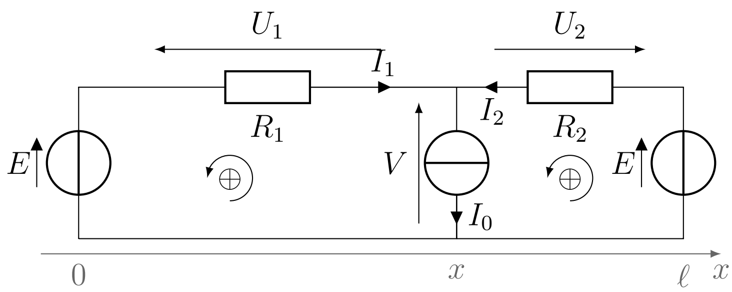


R6. Établir les expressions de I_1, I_2 et V en fonction de I_0, R_1 et R_2, puis en fonction de R, E, I_0, x et ℓ. *On utilisera pour cela les lois nécessaires pour établir un système d'équations, avec autant d'équations que d'inconnues, que l'on résoudra.*

Montrer, notamment, que $I_1 = I_0\dfrac{\ell - x}{\ell}$.

Solution: Il y a cinq inconnues : U_1, U_2, I_1, I_2 et V. Il est donc nécessaire d'établir cinq équations indépendantes pour résoudre le problème.

Loi des mailles à gauche : $V + U_1 - E = 0$ (1) , avec $U_1 = R_1 I_1$ (4) , soit $V + R_1 I_1 = E$ (1')
Loi des mailles à droite : $E - U_2 - V = 0$ (2) , avec $U_2 = R_2 I_2$ (5) , soit $V + R_2 I_2 = E$ (2')
Loi des nœuds : $I_1 + I_2 - I_0 = 0$ (3)



En injectant les expressions de I_1 et I_2 issues de (1') et (2') dans (3), on obtient :

$$\frac{E-V}{R_1}+\frac{E-V}{R_2}=I_0 \Leftrightarrow (E-V)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=I_0 \Leftrightarrow E-V=I_0\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \quad (6)$$

Ainsi $\boxed{V=E-I_0\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$

On peut en déduire, avec les expressions de R_1 et R_2 établies précédemment : $V=E-I_0\times\frac{R\frac{x}{\ell}\times R\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}{R}$ $(R_1+R_2=R)$

On obtient $\boxed{V=E-RI_0\times\frac{x}{\ell}\times\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$

On en déduit, de (1') : $I_1=\frac{E-V}{R_1}$, d'après (6) : $I_1=I_0\frac{R_2}{R_1+R_2}$, soit $\boxed{I_1=I_0\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$

La loi des nœuds nous permet d'accéder à $\boxed{I_2=I_0-I_1=I_0\frac{x}{\ell}}$

Pour cette question, il y a plein de façons d'arriver aux différents résultats, selon la façon dont on combine les relations entre elles.

R7. En déduire la puissance consommée $\mathscr{P}_c$ par la locomotive (c'est-à-dire reçue par la locomotive) en fonction de E, R, I_0, x et ℓ.

Solution: La locomotive est placée en convention récepteur avec V la tension à ses bornes et I_0 l'intensité à travers.

Ainsi, la puissance reçue par la locomotive s'écrit $\boxed{\mathscr{P}_c=V\times I_0=EI_0-RI_0^2\times\frac{x}{\ell}\times\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$ (on vérifie que l'expression est bien homogène).

R8. Déterminer la puissance $\mathscr{P}_J$ reçue par la caténaire, c'est-à-dire la somme de la puissance reçue par R_1 et par R_2, en fonction de R_1, I_1, R_2, I_2, puis en fonction de R, I_0, x et ℓ.
Que devient l'énergie associée ?

Solution: La puissance $\mathscr{P}_J$ reçue par la caténaire est donnée par $\mathscr{P}_J=\mathscr{P}_{J1}+\mathscr{P}_{J2}=R_1I_1^2+R_2I_2^2$

Avec les expressions précédentes : $\mathscr{P}_J=R\frac{x}{\ell}\times I_0^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2+R\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\times I_0^2\frac{x^2}{\ell^2}$

En factorisant ce qui peut l'être : $\mathscr{P}_J=RI_0^2\frac{x}{\ell}\times\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\times\left(1-\frac{x}{\ell}+\frac{x}{\ell}\right)$, ainsi $\boxed{\mathscr{P}_J=RI_0^2\frac{x}{\ell}\times\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$

Cette puissance, nécessairement positive ($x<\ell$), donc réellement reçue par la résistance, est dissipée par effet Joule, c'est-à-dire est transformée en transfert thermique.

R9. Déterminer la puissance totale $\mathscr{P}_f$ fournie par les deux sous-stations (c'est-à-dire la somme de la puissance fournie par la sous-station de gauche et celle de droite), en fonction de E, I_1 et I_2, puis en fonction de E et I_0.

Solution: La puissance totale $\mathscr{P}_f$ fournie par les deux sous-stations s'écrive $\mathscr{P}_f=E\times I_1+E\times I_2$ (les deux générateurs sont en convention générateur), soit $\mathscr{P}_f=E\times(I_1+I_2)$

À l'aide de la loi des nœuds, on en déduit $\boxed{\mathscr{P}_f=E\times I_0}$

R10. Vérifier que l'on a : $\mathscr{P}_f=\mathscr{P}_J+\mathscr{P}_c$. Que signifie physiquement cette égalité ?

Solution: On vérifie bien que $\boxed{\mathscr{P}_f = \mathscr{P}_J + \mathscr{P}_c}$, ce qui traduit la conservation de l'énergie : ce qui est fournie par les deux générateurs est en partie reçue par la locomotive et le reste est perdue par effet Joule dans les caténaires (à cause de leurs résistances non nulles).

Cette partie est plus délicate, et facultative. À aborder si vous êtes à l'aise.

On suppose que le train roule à la vitesse $v_0 = 574,8\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ constante.

R11. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule s'écrit $\mathscr{P}_J(t) = RI_0^2 \dfrac{v_0 t(\ell - v_0 t)}{\ell^2}$.

Solution: Le TGV est supposé roulé à vitesse constante et passer à la sous-station en amont à l'instant $t = 0$, ainsi $\boxed{x(t) = v_0 t}$

En remplaçant l'expression de x dans $\mathscr{P}_J$, on obtient $\boxed{\mathscr{P}_J(t) = RI_0^2 \dfrac{v_0 t(\ell - v_0 t)}{\ell^2}}$

R12. À quel instant t_f la locomotive atteint-elle alors la fin du tronçon considéré (sous-station de droite) ?

Solution: La locomotive atteint la fin du tronçon considéré à l'instant t_f tel que $\ell = v_0 t_f$, soit $\boxed{t_f = \dfrac{\ell}{v_0}}$

A.N. : $\underline{t_f = 6,2\ \text{min}}$

R13. En déduire alors l'énergie totale $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon en fonction de R, I_0, v_0 et ℓ. *L'instant t_0 correspond à l'instant auquel la locomotive passe par la sous-station de gauche.*
Faire l'application numérique.

Solution: L'énergie totale $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon est l'intégrale de $\mathscr{P}_J$ calculée entre t_0 et t_f : $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \mathscr{P}_J(t)\text{d}t = \int_{t_0}^{t_f} RI_0^2 \frac{v_0 t(\ell - v_0 t)}{\ell^2}\text{d}t$

soit $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = \dfrac{RI_0^2}{\ell^2} \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \ell v_0 t - v_0^2 t^2 \text{d}t = \frac{RI_0^2}{\ell^2}\left[\ell v_0 \frac{t^2}{2} - v_0^2 \frac{t^3}{3}\right]_{t_0}^{t_f}$

Ainsi $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = \dfrac{RI_0^2}{\ell^2} \times v_0 t_f^2 \left(\dfrac{\ell}{2} - \dfrac{v_0 t_f}{3}\right)$

Avec l'expression de $t_f = \dfrac{\ell}{v_0}$ $\left(\text{soit } \dfrac{t_f^2}{\ell^2} = \dfrac{1}{v_0^2}\right)$, on en déduit : $\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = \dfrac{RI_0^2}{v_0}\left(\dfrac{\ell}{2} - \dfrac{\ell}{3}\right)$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = \dfrac{RI_0^2 \ell}{6 v_0}}$

A.N. : $\underline{\mathscr{E}_{J,t_0 \to t_f} = 2,8.10^8\ \text{J}}$

R14. De même, déterminer l'énergie totale $\mathscr{E}_{f,t_0 \to t_f}$ fournie par les deux sous-stations sur le même intervalle de temps. On donnera le résultat en fonction de E, I_0, ℓ et v_0.

Solution: L'énergie totale fournie par les deux sous-stations s'écrit $\mathscr{E}_{f,t_0 \to t_f} = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} E \times I_0 \text{d}t = EI_0 t_f$ car EI_0 est une constante.

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{f,t_0 \to t_f} = EI_0 \times \dfrac{\ell}{v_0}}$

R15. En déduire l'énergie $\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f}$ consommée par les moteurs de la locomotive, toujours le long du tronçon considéré. On donnera le résultat en fonction de E, R, I_0, ℓ et v_0.

Solution: On en déduit l'énergie $\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f}$ consommée par les moteurs de la locomotive, par conservation de l'énergie :

$$\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f} = \mathscr{E}_{f,t_0\to t_f} - \mathscr{E}_{J,t_0\to t_f} = EI_0 \times \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}$$

Soit $\boxed{\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f} = I_0\frac{\ell}{v_0}\left(E - \frac{RI_0}{6}\right)}$

R16. Exprimer le rendement de ce mode d'alimentation de la locomotive, que l'on définit par : $\eta = \dfrac{\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f}}{\mathscr{E}_{f,t_0\to t_f}}$ en fonction de R, I_0 et E.
Faire l'application numérique, exprimée en %.

Solution:

Le rendement de ce mode d'alimentation de la locomotive s'écrit : $\eta = \dfrac{\mathscr{E}_{c,t_0\to t_f}}{\mathscr{E}_{f,t_0\to t_f}} = \dfrac{EI_0 \times \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}}{EI_0 \times \frac{\ell}{v_0}}$,

soit $\boxed{\eta = 1 - \frac{RI_0}{6E} = 97\%}$