Thème I. Ondes et signaux

TD n°4 Circuits linéaires du premier ordre — *Corrigé*

I Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 Étude expérimentale d'un circuit RC série

Capacités exigibles :

✓ *Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.*

✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.*

✓ *Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.*

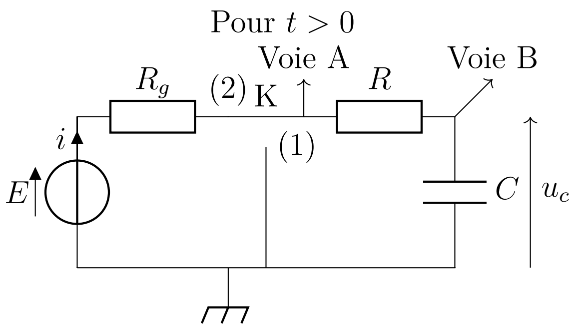
✓ *Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon*

✓ *Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.*

Soit le montage de la figure ci-contre, dans lequel un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C sont associés en série. Ce circuit « R, C » est relié à un générateur de tension constante, de force électromotrice E et de résistance interne R_g, selon les modalités suivantes :

— $t < 0$: K en position (1) afin de décharger totalement le condensateur ;

— $t \geq 0$: K en position (2) afin de charger progressivement le condensateur



R1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t \geq 0$.

Solution:

Loi des mailles : $u_C + (R + R_g)i = E$

Avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, soit $u_C + (R + R_g)C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$

On obtient alors : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{C(R + R_g)} = \dfrac{E}{C(R + R_g)}}$

On introduit la constante de temps du circuit telle que $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{C(R + R_g)}$, soit $\boxed{\tau = C(R + R_g)}$

R2. Établir l'expression de $u_C(t)$ en fonction de R, R_g, C et t pour $t \geq 0$.

Solution:

Solution générale de l'équation homogène : $u_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution particulière recherchée sous la forme d'une constante : $\dfrac{u_P}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

Solution générale de l'équation différentielle : $u_C(t) = u_H(t) + u_P = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

On a déchargé le condensateur pour $t < 0$, donc $u_C(0^-) = 0$.

Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

On en déduit A telle que : $u_C(0^+) = A + E = 0$

Ainsi $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

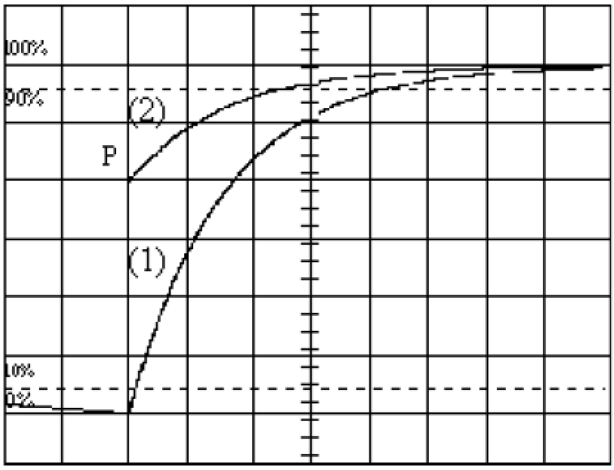
R3. Déterminer l'expression de t_1, pour laquelle $u_C(t_1) = 0,9E$.

Solution:
t_1 est tel que $u_C(t_1) = 0,9E$, soit $E\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = 0,9E$, soit $e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,1$, soit $\boxed{t_1 = -\tau\ln(0,1) = \tau\ln(10)}$

On observe l'oscillogramme ci-contre en utilisant un générateur délivrant des signaux créneaux.

Les sensibilités sont :
1 V/carreau vertical ;
0,1 ms/carreau horizontal.

On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.



R4. Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.

Solution:
La courbe (2) correspond à un signal discontinu dans le temps, elle ne peut pas représenter la tension aux bornes du condensateur qui ne peut pas subir de discontinuité, donc elle correspond à la voie A. Par élimination, la courbe (1) représente la voie B.

R5. Préciser l'expression de la tension au point P. Sachant que $R = 100\ \Omega$, déterminer R_g. Comment aurait-il fallu choisir R pour visualiser correctement le signal créneau ?

Solution: Le point P est sur la courbe (2) :
La loi des mailles donne : $u_2(t) = E - R_g i(t) = E - R_g C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E - \dfrac{R_g C}{\tau}Ee^{-\frac{t}{\tau}}$, soit $u_2(t) = E\left(1 - \dfrac{R_g}{R_g + R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

À $t = 0^+$: $u_2(0^+) = E\left(1 - \dfrac{R_g}{R_g + R}\right)$, soit $\boxed{u_2(0^+) = \dfrac{RE}{R_g + R}}$

On lit $u_2(0^+) = 4$ V et $E = 6,0$ V (valeur finale)

On peut déterminer $\boxed{R_g = R\left(\dfrac{E}{u_2(0^+)} - 1\right)}$

A.N. : $R_g = 100 \times \left(\dfrac{6}{4} - 1\right)$, soit $\underline{R_g = 50\ \Omega}$:-)

R6. En déduire la valeur de C.

Solution: Pour cela, on peut mesurer l'instant t_1 sur la courbe fournie, en utilisant l'indication 90%.
On lit $\boxed{t_1 = 0,42 \text{ ms}}$

Or $t_1 = \tau\ln(10) = C(R + R_g)\ln(10)$, soit $\boxed{C = \dfrac{t_1}{(R + R_g)\ln(10)}}$

A.N. : $\underline{C = 1,2\ \mu\text{F}}$

R7. Estimer une majoration de la fréquence du signal créneau utilisé.

Solution: Le régime transitoire est observé en totalité, le régime permanent a le temps de s'installer, donc la demie-période du créneau est supérieure à quelques τ.

Ainsi $\dfrac{T}{2} > (R+R_g)C$, soit $\boxed{f < \dfrac{1}{2C(R+R_g)}}$

La fréquence du GBF est limitée par $f_{\max} = 2,7$ kHz

R8. Comment pourrait-on observer l'intensité ?

Solution:
Pour observer l'intensité, on pourrait visualiser la tension aux bornes de la résistance, en permutant la résistance avec le condensateur pour ne pas avoir de problème de masse au niveau de l'oscilloscope. La tension aux bornes de R donne, à une constante près, R, l'intensité qui circule dans le circuit.

II Exercices d'approfondissement

Exercice 2 Étude d'un circuit RL

Capacités exigibles :

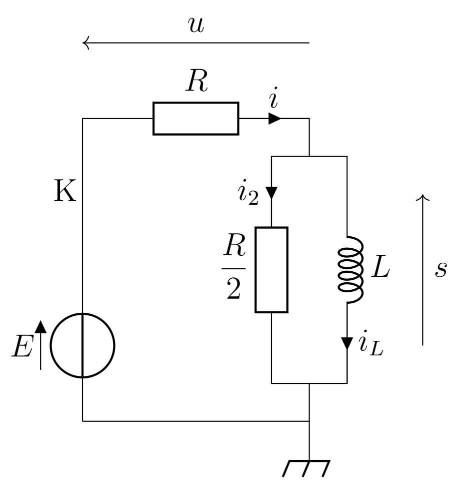
✓ *Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.*

✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.*

✓ *Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.*

✓ *Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon*

On étudie le circuit ci-contre.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K, qui était ouvert depuis très longtemps.



R1. L'intensité du courant i traversant la résistance R est-elle continue en $t = 0$? Sinon, donner les valeurs en $t = 0^-$ et $t = 0^+$.

Solution:
Pour $t < 0$, aucun courant ne circule, donc $i_L(0^-) = 0$

L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

Ainsi $\boxed{i_L(0^+) = 0}$

La loi des nœuds s'écrit à $t = 0^+$: $i(0^+) = i_2(0^+)$.

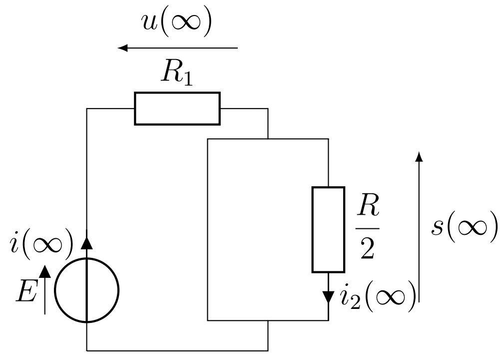
La loi des mailles $s(0^+) + u(0^+) = E$, donc $Ri_2(0^+) + \dfrac{R}{2}i(0^+) = E$,

donc $\boxed{i(0^+) = i_2(0^+) = \dfrac{2E}{3R} \neq i(0^-) = 0}$

R2. Même question pour la tension s. Que vaut $s(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?

Solution:
$\boxed{s(0^+) = \frac{R}{2} i_2(0^+) = \frac{E}{3}}$

En régime permanent la bobine se comporte comme un fil conducteur. Ainsi la tension s est la tension aux bornes d'un fil, donc $\boxed{s(\infty) = 0}$
La loi des mailles donne alors $s(\infty) + u(\infty) = E$, soit $\boxed{u(\infty) = E}$



R3. Établir l'équation différentielle vérifiée par s, en déduire l'expression de s et tracer son allure[1] .

Solution: Bien distinguer : « établir l'équation différentielle » et « en déduire l'expression de s (c'est-à-dire résoudre l'équation différentielle établie précédemment) »

Établissement de l'équation différentielle

Il y a 5 inconnues : i, i_L, i_2, s, u, il faut donc écrire 5 équations indépendantes :

Lois d'Ohm : $u = Ri$ (1) et $s = \frac{R}{2} i_R$ (2)
Loi des nœuds : $i = i_L + i_2$ (3)
Loi des mailles : $u + s = E$ (4)
Relation de la bobine : $s = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ (5)
(3) dans (5) : $s = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ (5')
(2) et (1) dans (5') : $s = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{\frac{R}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (5")
(4) dans (5") : $s = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}(E-s)}{\mathrm{d}t} - \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

Alors $s = -L\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$ que l'on peut identifier avec $\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = 0}$ avec $\boxed{\tau = \frac{3L}{R}}$ la constante de temps du circuit étudié.

Résolution

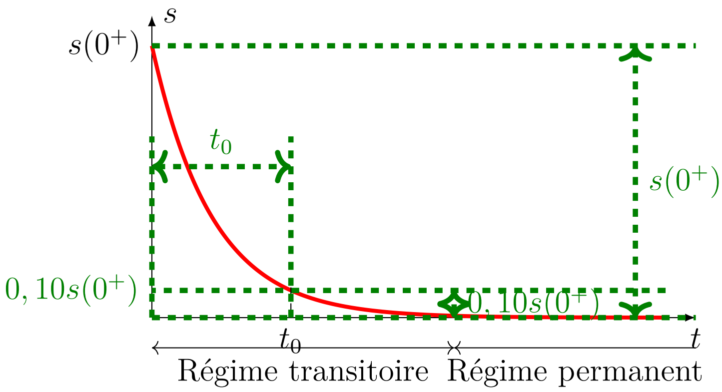
Solution générale de l'équation différentielle (sans second membre) : $s(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

Or $s(0^+) = \frac{E}{3}$, donc $K = \frac{E}{3}$.

Ainsi $\boxed{s(t) = \frac{E}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

1. Méthode :

1. Écrire les 5 équations : loi des mailles, des nœuds et les 3 relations courant/tension.
2. Exprimer les différentes grandeurs électriques en fonction de s.
3. En déduire l'équation différentielle en fonction de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0$.
4. La résoudre en utilisant les conditions initiales fournies.



R4. Exprimer en fonction de L et R, le temps t_0 au bout duquel la tension s a été divisée par 10.

Solution:
t_0 est tel que $s(t_0) = \dfrac{s(0^+)}{10}$
$\Leftrightarrow \dfrac{E}{3}e^{-t_0/\tau} = \dfrac{E}{30} \Leftrightarrow e^{-t_0/\tau} = \dfrac{1}{10}$
$\Leftrightarrow \boxed{t_0 = \tau \ln(10) = \dfrac{3L}{R}\ln(10)}$

R5. Proposer une méthode expérimentale pour déterminer t_0 à l'aide d'un oscilloscope. On précisera le montage à utiliser et la méthode de mesure pratique.

Solution: Le montage à utiliser est le montage réalisé ci-dessus.
Il faut mesurer à l'aide des curseurs $s(0)$, puis calculer $0,10s(0)$ et placer les curseurs de temps afin de mesurer l'écart de temps séparant $t = 0$ et l'instant t_0 où s vaut $0,10s(0)$.

R6. On mesure $t_0 = 3,0$ µs pour $R = 1000\ \Omega$. En déduire la valeur de L. On donne $1/\ln(10) \approx 0,43$.

Solution:
$\boxed{L = \dfrac{t_0 R}{3\ln(10)}}$
A.N. : $L = \dfrac{3.10^{-6} \times 10^3}{3\ln(10)} = \dfrac{1}{\ln(10)} \times 10^{-3}$, soit avec l'indication numérique : $\underline{L = 0,43 \text{ mH}}$

R7. On remplace le générateur idéal de tension par un générateur délivrant un créneau de période T. Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence à utiliser pour pouvoir effectivement mesurer t_0 par la méthode proposée ci-dessus ?

Solution: Si le circuit est alimenté par un signal créneau, le régime étudié est observé lorsque le créneau est en haut, soit durant la moitié de la période du créneau. Pour pouvoir mesurer t_0, il faut que t_0 soit très inférieur à $\dfrac{T}{2}$: $\dfrac{T}{2} \gg t_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2f} \gg t_0 \Leftrightarrow \boxed{f \ll \dfrac{1}{2t_0} = \dfrac{10^3}{6}\text{ Hz} \approx 1,7.10^2\text{ Hz}}$
Le critère souvent choisi est $\dfrac{T}{2}$ de l'ordre de grandeur de 5τ (durée approximative du régime transitoire).

Exercice 3 Charge d'un condensateur réel

Capacités exigibles :

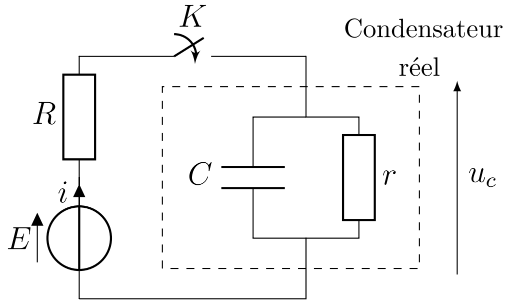
✓ *Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.*

✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.*

✓ *Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.*

✓ *Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon.*

Un condensateur réel est modélisé par l'association parallèle d'un condensateur idéal de capacité C et d'une résistance r dite « de fuite ».
Le condensateur réel est chargé par un générateur idéal de fem E, à travers une résistance R.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et le condensateur déchargé.
À $t = 0$, on ferme K.



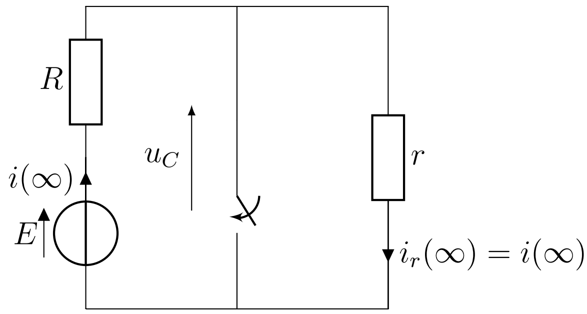
R1. Que vaut la tension $u_c(t = 0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur ?

Solution: Le condensateur est initialement déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$ V.
La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0 \text{ V}}$.

R2. Déterminer la valeur finale $u_c(\infty)$ atteinte par u_c à la fin du régime transitoire en utilisant le comportement des composants en régime permanent.

Solution:
En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
Comme il n'y a plus qu'une seule maille : $i(\infty) = i_r(\infty)$
Loi des mailles : $E - Ri(\infty) = ri(\infty) \Leftrightarrow i(\infty) = \dfrac{E}{R+r}$

Loi d'Ohm : $\boxed{u_c(\infty) = ri(\infty) = r\dfrac{E}{R+r}}$



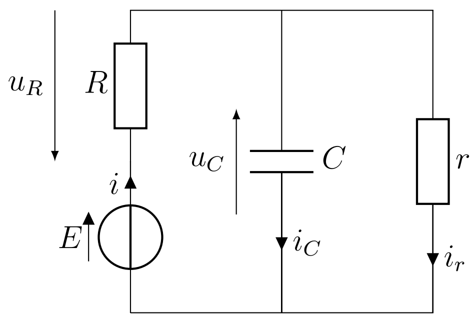
R3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ et l'écrire sous forme canonique et identifier τ [2].

Solution:
Nommer toutes les intensités et les tensions AVANT de commencer
5 inconnues => 5 équations indépendantes

1. Loi des nœuds : $i = i_r + i_c$
2. Relation du condensateur : $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$;
3. Loi d'Ohm à r : $i_r = \dfrac{u_C}{r}$
4. Loi d'Ohm à R : $u_R = Ri$
5. Loi des mailles : $u_C + u_R - E = 0$

Ainsi e) dans d) : $i = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{E - u_C}{R}$ d')

b), c) et d') dans la loi des nœuds : $\dfrac{E - u_C}{R} = \dfrac{u_c}{r} + C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$



2. Méthode :
1. Appliquer la loi des nœuds.
2. Exprimer les intensités à travers r et C en fonction de u_c.
3. Exprimer i en fonction de u_c.
4. En déduire que l'équation différentielle s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right)u_c(t) = \dfrac{E}{RC}$

Sous forme canonique : $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right) u_c(t) = \dfrac{E}{RC}$ que l'on peut identifier avec $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{u_c(\infty)}{\tau}$,
avec la constante de temps τ du circuit tel que $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \boxed{\tau = \dfrac{rRC}{r+R}}$
et $\dfrac{u_c(\infty)}{\tau} = \dfrac{Er}{r+R} \times \dfrac{r+R}{rRC} = \dfrac{E}{RC}$
Rq : $\dfrac{1}{\tau} > \dfrac{1}{RC} \Leftrightarrow \tau < RC$: la constante de temps du circuit est plus faible lorsque l'on prend en compte la résistance de fuite.

R4. Résoudre complètement l'équation différentielle précédente, en prenant en compte les conditions initiales.

Solution:
La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit $u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}$, avec :

- $u_{c,h}$ est la solution générale de l'équation homogène : $\dfrac{du_{c,h}}{dt} + \dfrac{u_{c,h}}{\tau} = 0$, donc $u_{c,h} = Ke^{-t/\tau}$, avec K un réel.
- $u_{c,p}$ est une solution particulière recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire constante ici :
  $u_{c,p} = \dfrac{E}{RC}\tau = \dfrac{r}{r+R}E$

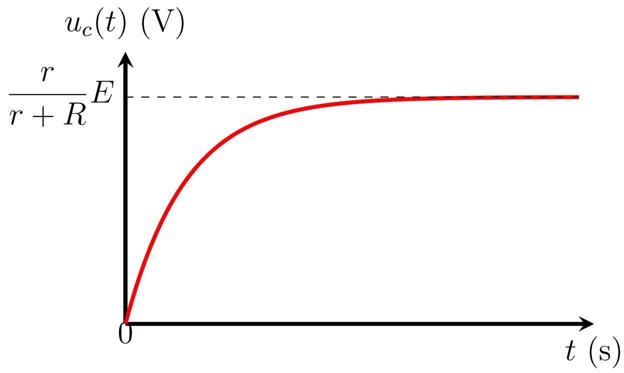
Ainsi : $\boxed{u_c(t) = Ke^{-t/\tau} + \dfrac{r}{r+R}E}$

Or d'après les conditions initiales : $u_c(0^+) = 0 = K + \dfrac{r}{r+R}E$,

Ainsi $\boxed{u_c(t) = \dfrac{r}{r+R}E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

R5. Tracer le graphe de $u_c(t)$. Quelle est la tension finale aux bornes du condensateur ?

Solution: $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} u_c(t) = \dfrac{r}{r+R}E}$



R6. On appelle temps de réponse t_r à 5% le temps que met la tension pour atteindre la valeur finale à 5% près : c'est le temps t_r tel que $|u_C(t_r) - u_{C,\text{finale}}| = 0,05|u_{C,\text{finale}}|$.
Déterminer ce temps de réponse à 5% .

Solution:
$|u_C(t_r) - u_{C,\text{finale}}| = \left|\dfrac{r}{R+r}E\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) - \dfrac{r}{R+r}E\right| = \dfrac{r}{R+r}e^{-\frac{t_r}{\tau}}$
t_r est tel que $\dfrac{r}{R+r}e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0,05 \times \dfrac{r}{R+r}$

Soit $e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0,05$, soit $\boxed{t_r = -\tau \ln(0,05)}$

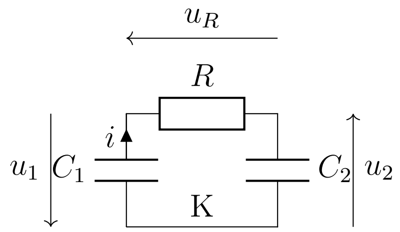
Exercice 4 Décharge d'un condensateur dans un autre

Capacités exigibles :

- ✓ *Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.*
- ✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.*
- ✓ *Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.*
- ✓ *Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon*

On étudie le circuit représenté ci-contre.
Initialement, le condensateur de capacité C_1 porte une charge q_0, tandis que le condensateur de capacité C_2 est déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

Pour $t > 0$ (une fois l'interrupteur fermé)



R1. Établir l'expression de l'intensité du courant i qui circule dans le circuit. Quelles sont les charges des condensateurs au bout d'un temps très long ?

Solution: Il faut commencer par **établir l'équation différentielle**

1. Loi des mailles : $u_2 + u_R + u_1 = 0$
2. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$
3. Relation du condensateur pour C_1 : $i = C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$
4. Relation du condensateur pour C_2 : $i = C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$

On dérive par rapport au temps la loi des mailles : $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0$

En injectant les relations des condensateurs : $\dfrac{i}{C_1} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{C_2} = 0$

Soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) i = 0}$.

On introduit la constante de temps τ telle que $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$, soit $\boxed{\tau = \dfrac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}}$

Résolution de l'équation différentielle

Solution générale : $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.
Il faut déterminer la condition initiale $i(0^+)$ pour déterminer la constante d'intégration.
Pour $t < 0$, $q_1(0^-) = q_0$ et $q_2(0^-) = 0$ (condensateur 2 déchargé).
Or la charge du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $q_1(0^+) = q_1(0^-) = q_0$ et $q_2(0^+) = q_2(0^-) = 0$

Loi des mailles à $t = 0^+$: $u_1(0^+) + u_2(0^+) + Ri(0^+) = 0$, soit $\dfrac{q_0}{C_1} + 0 + Ri(0^+) = 0$, donc $i(0^+) = \dfrac{-q_0}{RC_1}$

Ainsi on détermine la constante d'intégration $A = -\dfrac{q_0}{RC_1}$.

Soit $\boxed{i(t) = -\dfrac{q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

R2. Quelle est l'énergie stockée dans les condensateurs avant la fermeture de K ? Quelle est l'énergie stockée après la fermeture de K au bout d'un temps très long ? Sous quelle forme l'énergie s'est-elle dissipée ?

Solution:

Avant la fermeture de l'interrupteur : $\boxed{\mathscr{E}_C(t<0) = \mathscr{E}_{C1}(t<0) + \mathscr{E}_{C2}(t<0) = \dfrac{q_0^2}{2C_1}}$

Après la fermeture de l'interrupteur ?

Commençons par déterminer les charges des deux condensateurs : $i = \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$

Ainsi $q_1(t) = \dfrac{q_0\tau}{RC_1}e^{-\frac{t}{\tau}} + B$, avec $q_1(0) = q_0$, soit $B = q_0 - \dfrac{q_0\tau}{RC_1}$

Ainsi $\boxed{q_1(t) = \dfrac{q_0\tau}{RC_1}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + q_0}$

$q_2(t) = \dfrac{q_0\tau}{RC_1}e^{-\frac{t}{\tau}} + D$, avec $q_2(0) = 0$, soit $D = -\dfrac{q_0\tau}{RC_1}$

Ainsi $\boxed{q_2(t) = \dfrac{q_0\tau}{RC_1}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)}$

$$\mathscr{E}_C(t\to\infty) = \mathscr{E}_{C1}(t\to\infty) + \mathscr{E}_{C2}(t\to\infty) = \frac{1}{2C_1}\left(q_0 - \frac{q_0\tau}{RC_1}\right)^2 + \frac{1}{2C_2}\left(\frac{q_0\tau}{RC_1}\right)^2$$

Soit : $\mathscr{E}_C(t\to\infty) = \dfrac{q_0^2}{2}\left(\dfrac{1}{C_1}\left(1 - \dfrac{C_2}{C_1+C_2}\right)^2 + \dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\right)^2\right)$

Soit $\mathscr{E}_C(t\to\infty) = \dfrac{q_0^2}{2}\left(\dfrac{C_1}{(C_1+C_2)^2} + \dfrac{C_2}{(C_1+C_2)^2}\right)$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_C(t\to\infty) = \dfrac{q_0^2}{2(C_1+C_2)} < \mathscr{E}_C(t<0)}$: l'énergie s'est dissipée sous forme d'énergie thermique par effet Joule.

On peut le vérifier : $\mathscr{E}_J = \displaystyle\int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \int_0^\infty R\frac{q_0^2}{(RC_1)^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t$

soit $\mathscr{E}_J = \dfrac{q_0^2}{RC_1^2} \times \dfrac{\tau}{2} = \dfrac{q_0^2}{2RC_1^2} \times \dfrac{RC_1C_2}{C_1+C_2}$

Soit $\boxed{\mathscr{E}_J = \dfrac{q_0^2C_2}{2C_1(C_1+C_2)}}$

On vérifie que $\mathscr{E}_C(t<0) - \mathscr{E}_J = \dfrac{q_0^2}{2C_1}\left(1 - \dfrac{C_2}{C_1+C_2}\right) = \dfrac{q_0^2}{2(C_1+C_2)} = \mathscr{E}_C(\infty)$! ouf ! il y a bien conservation de l'énergie électrique.

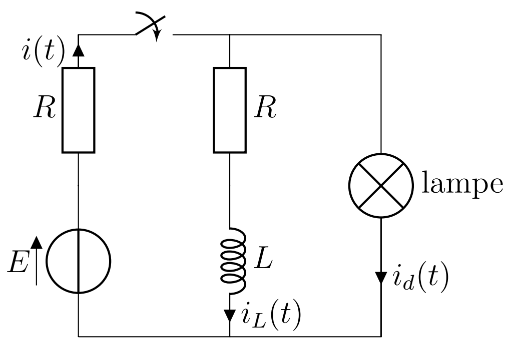
Exercice 5 Lampe témoin

Capacités exigibles :

✓ *Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.*

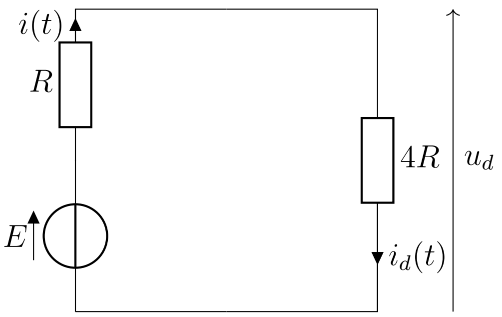
✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.*

On considère le montage ci-dessous.
Au temps $t = 0$ on ferme l'interrupteur.
On note $i(t)$ le courant dans la branche du générateur, $i_L(t)$ celui dans la bobine et $i_d(t)$ celui dans la lampe.
La lampe se comporte comme un dipôle ohmique de résistance $4R$.
On répondra aux questions sans écrire d'équation différentielle.



R1. Donner la valeur de $i_L(t)$ en $t = 0$. En déduire la valeur de $i(t)$ et $i_d(t)$ juste après la fermeture.

Solution:
À $t = 0^-$, $i_L(0^-) = 0$ (circuit ouvert). Or l'intensité à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0}$
Le circuit est alors équivalent à :

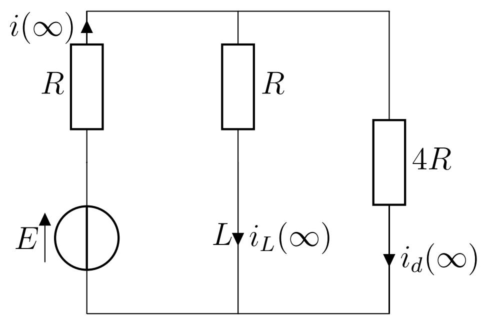


À $t = 0^+$, la loi des nœuds donne $i(0^+) = i_d(0^+)$.

La loi des mailles donne : $E = 5Ri(0^+)$, soit $\boxed{i(0^+) = i_d(0^+) = \dfrac{E}{5R}}$

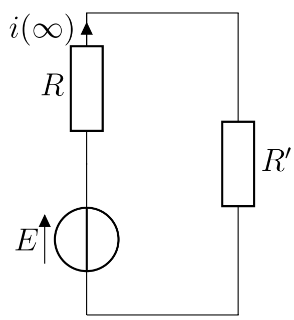
R2. Quelle est la valeur des différents courants une fois le régime permanent atteint ?

Solution:
En régime permanent, la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (à un fil), le circuit devient :



Pont diviseur de courant : $i_d(\infty) = \dfrac{1/4R}{1/4R + 1/R} i(\infty) = \dfrac{i(\infty)}{5}$

Par association des résistances, on obtient :



avec R' telle que $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{4R}$, soit $R' = \dfrac{4R}{5}$

Ainsi la loi des mailles et la loi d'Ohm donnent : $E = Ri(\infty) + \dfrac{4R}{5} i(\infty)$, ainsi $\boxed{i(\infty) = \dfrac{5E}{9R}}$

Alors $\boxed{i_d(\infty) = \dfrac{E}{9R}}$ et $\boxed{i_L(\infty) = \dfrac{4E}{9R}}$

R3. Après un temps t_1 suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint, on ouvre l'interrupteur. Quelle est la valeur des différents courants juste après l'ouverture ?

Solution:
Juste après l'ouverture de l'interrupteur : $i(t_1^+) = 0$

Par continuité de l'intensité à travers la bobine : $\boxed{i_L(t_1^+) = i_L(t_1^-) = \dfrac{4E}{9R}}$

La loi des nœuds donne immédiatement : $\boxed{i_d(t_1^+) = -i_L(t_1^+) = -\dfrac{4E}{9R}}$

R4. La lampe ne s'allume que pour $|i_d| > \dfrac{E}{8R}$. À quoi sert-elle ?

Solution: Quand l'interrupteur est fermé la lampe est éteinte, en régime permanent l'intensité qui la traverse étant inférieure à $\dfrac{E}{8R}$. Au moment de l'ouverture de l'interrupteur, l'intensité qui la traverse dépasse en valeur absolue cette valeur, et la lampe s'allume. La lampe sert donc de témoin pour signaler l'ouverture de l'interrupteur.

III Résolution de problèmes

Exercice 6 La foudre

Les nuages d'orage sont des cumulonimbus qui présentent une forme d'enclume ou de haute tour. Ils sont composés à la fois d'eau et de glace. Lors des orages, le cumulonimbus est fortement chargé électriquement. Globalement, le sommet du nuage est chargé positivement alors que sa base possède une charge négative. La partie du nuage qui se trouve en regard de la Terre étant chargée négativement, le sol se charge positivement par influence. Par temps d'orage, on peut comparer le système {base du nuage−sol} à un gigantesque condensateur constitué par de l'air placé entre le bas du nuage et le sol.
L'isolant entre les deux armatures est l'air ; dans certaines conditions, il devient localement conducteur. Il s'établir alors un canal ionisé entre le sol et le nuage dans lequel une ou plusieurs décharges se produisent. Ces décharges constituent la foudre proprement dite. L'éclair est le phénomène lumineux qui accompagne la foudre lors de la décharge. Les gaz, sur le trajet de la décharge électrique sont surchauffés et ionisés, ils émettent alors de la lumière. Le tonnerre est un son produit par l'expansion brutale de la fine colonne d'air qui a été chauffée très rapidement par la foudre au cours d'un orage.

Estimer la durée d'un éclair.

Données : La foudre se déplace à une vitesse considérable et correspond à une tension maximale de l'ordre de 100 millions de volts et à une intensité maximale d'environ 30 kiloampères. La décharge est considérée comme complète lorsque la tension a diminué de 99 %. L'énergie électrique mise en jeu lors de la décharge vaut 50 MJ.

Solution: