Thème I. Ondes et signaux

TD n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

I Exercices d'application directe du cours

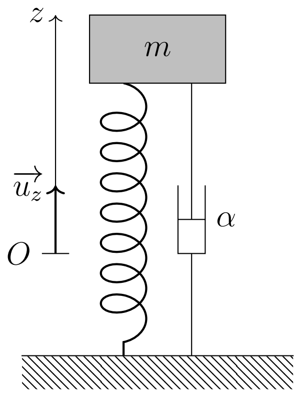
Exercice n°1 Résonance en vitesse

Capacités exigibles : *Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.*

Lorsqu'un moteur de compresseur fonctionne, il est à l'origine de vibrations périodiques qui peuvent entraîner des déplacements importants du châssis. Pour minimiser ce phénomène, il est nécessaire de prévoir un système de suspension et d'amortissement.

On assimile le moteur à un point matériel de masse m posé sur l'association d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 avec un amortisseur exerçant une force de freinage $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse du moteur et α une constante positive.

Pour exprimer la position du moteur $z(t)$, on choisit un axe vertical (Oz) ascendant dont l'origine est à la position d'équilibre de la masse m.



Q1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre lorsque le moteur ne fonctionne pas.

En fonctionnement, tout se passe comme si une force supplémentaire $\vec{F} = F_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$ agissait sur le moteur.

Q2. Établir l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ lorsque le moteur fonctionne sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Q3. On cherche pour la vitesse une solution de la forme $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = V_0\cos(\omega t + \phi)$.

Établir l'équation vérifiée par l'amplitude complexe de la vitesse $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$.

Q4. Exprimer V_0 en fonction de ω et des paramètres $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{F_0}{m}$.

Q5. Étudier l'existence d'une résonance. Dépend-elle du facteur de qualité ?

Q6. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

Q7. La pulsation vaut $\omega = 628$ rad $\cdot$ s^{-1} et le moteur a une masse $m = 10$ kg. On dispose de deux ressorts de raideur respective $k_1 = 4,0.10^6$ N $\cdot$ m^{-1} et $k_2 = 1,0.10^6$ N $\cdot$ m^{-1}. Lequel faut-il choisir ?

Exercice n°2 Résonance en intensité du RLC parallèle

Capacités exigibles :

✓ *Connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.*

✓ *Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.*

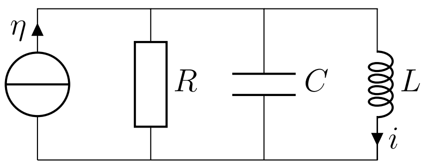
✓ *Utiliser les relations des ponts diviseurs de tension ou de courant.*

✓ *Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.*

Un circuit RLC parallèle est alimenté par une source de courant idéale, traversée par une intensité $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t)$.

La bobine d'inductance L est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

On pose $G = \dfrac{I_m}{\eta_m}$.



Q1. Établir l'expression de l'amplitude $\underline{I_m}$ complexe de l'intensité.

Q2. En déduire l'expression de $G(\omega)$.

Q3. Déterminer les extrema de $G(\omega)$ et montrer qu'il existe un phénomène de résonance en intensité quand $R > R_c$, avec R_c une valeur critique de la résistance dont on donnera l'expression.

Q4. Tracer l'allure de $G(\omega)$ dans les deux cas : $R < R_c$ et $R > R_c$.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Circuit RLC parallèle

Capacités exigibles :

✓ *Connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.*

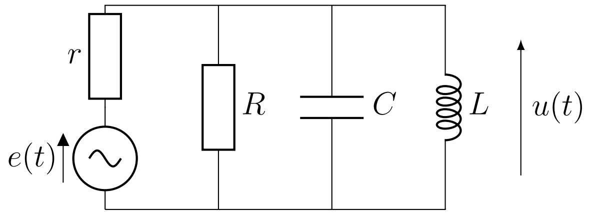
✓ *Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.*

✓ *Utiliser les relations des ponts diviseurs de tension ou de courant.*

✓ *Utiliser la méthode des complexes pour étudier le régime forcé.*

✓ *Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.*

On considère le circuit représenté ci-contre.
Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



Q1. Déterminer les valeurs de l'amplitude U_m de $u(t)$ à basse et haute fréquence en étudiant le comportement asymptotique des dipôles.

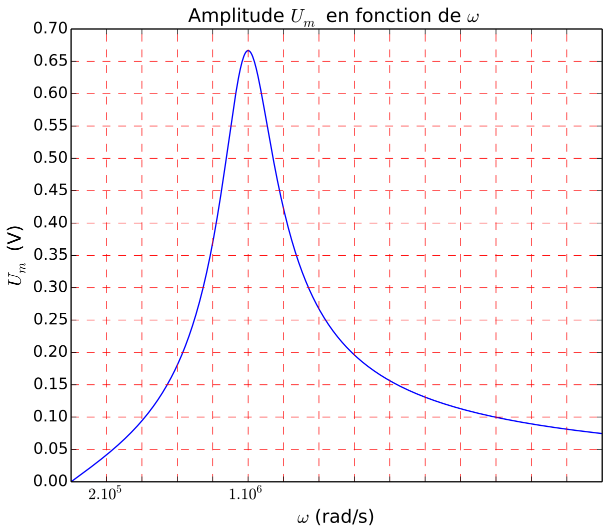
Q2. Établir l'expression de l'admittance complexe au dipôle RLC parallèle.

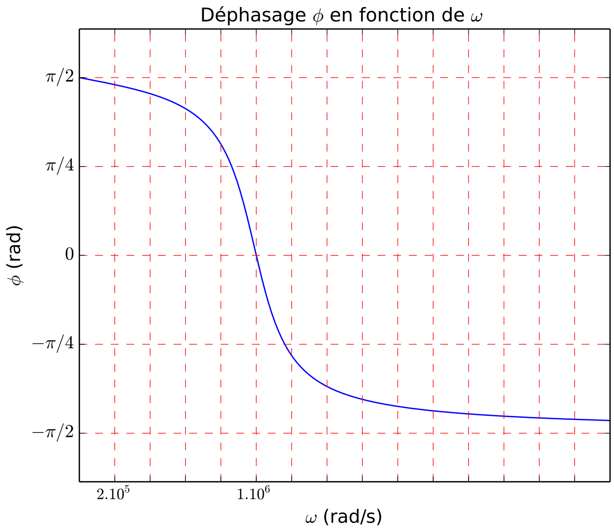
Q3. Établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_m}$ de la tension u en fonction de E_m, r, R, L, C et ω.

La mettre sous la forme : $\underline{U_m} = \dfrac{AE_m}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, et identifier les expressions de A, Q et ω_0 (faites attention aux unités des différentes grandeurs !).

Q4. Pour quelle pulsation la tension $u(t)$ est-elle en phase avec le générateur $e(t)$?

Q5. Déterminer ω_0 et Q à l'aide des graphes ci-dessous. Justifier la réponse.





Exercice n°4 Circuit bouchon

Capacités exigibles :

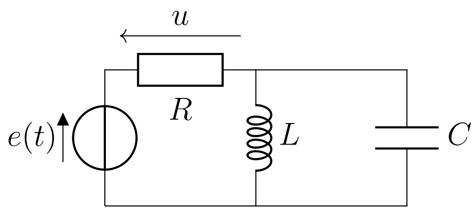
✓ *Connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.*

✓ *Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.*

✓ *Utiliser les relations des ponts diviseurs de tension ou de courant.*

✓ *Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.*

On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
On étudie la tension aux bornes de la résistance en régime sinusoïdal forcé : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



Q1. Établir l'expression de $u(t)$ à l'aide des impédances complexes.
On introduira la pulsation caractéristique et le facteur de qualité.
En déduire l'amplitude complexe $\underline{U_0}(x)$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

Q2. Étudier et tracer le module de U_0 en fonction de x. Montrer qu'il existe une anti-résonance (pulsation pour laquelle l'amplitude U_0 est nulle).

Exercice n°5 Oscillateur à quartz

Capacités exigibles :

✓ *Connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.*

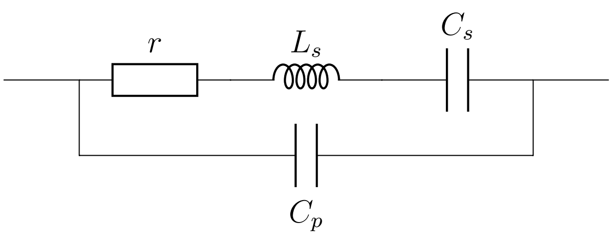
✓ *Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.*

✓ *Utiliser les relations des ponts diviseurs de tension ou de courant.*

✓ *Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.*

L'oscillateur à cristal est la solution naturelle lorsque la fréquence des oscillations doit être stable et précise. Un oscillateur à quartz permet d'obtenir des oscillations dont la fréquence est comprise entre quelques dizaines de kHz et quelques dizaines de MHz.

On utilise un quartz de fréquence 3,2768 MHz. Le schéma équivalent du quartz est représenté sur la figure ci-contre.



Q1. Montrer que l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z_Q}(j\omega)$ du quartz s'exprime en fonction de la pulsation ω selon la relation :

$$\underline{Z_Q}(j\omega) = \frac{1 + jC_s\omega(r + jL_s\omega)}{j(C_s + C_p)\omega + j^2 C_s C_p \omega^2 (r + jL_s\omega)}$$

Q2. On néglige la résistance r du quartz. Donner l'expression simplifiée de l'impédance complexe $\underline{Z_Q}(j\omega)$. En déduire la valeur de l'impédance du quartz en continu.

Q3. En négligeant la résistance r du quartz, montrer que l'expression simplifiée de l'impédance complexe peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Z_Q}(j\omega) = \frac{1}{jC_{\text{éq}}\omega}\frac{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

En déduire par identification les expressions de la capacité équivalente $C_{\text{éq}}$, ainsi que des pulsations ω_1 et ω_2.

Q4. Le système possède deux fréquences de résonance définies par : $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ (fréquence de résonance série) et $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi}$ (fréquence de résonance parallèle). Montrer que $f_1 < f_2$.

Q5. Déterminer la valeur des fréquences f_1 et f_2 ainsi que l'écart $f_1 - f_2$ pour le quartz considéré.
On prendra $L_s = 66,266$ mH ; $C_s = 3,56.10^{-14}$ F ; $C_p = 8,9.10^{-12}$ F

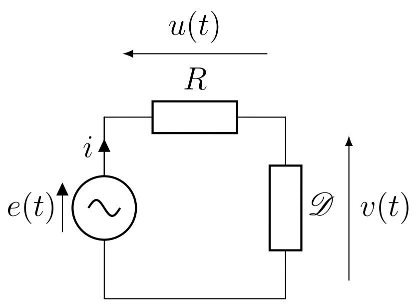
Q6. Étudier les variations du module et de l'argument de $\underline{Z_Q}(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω.

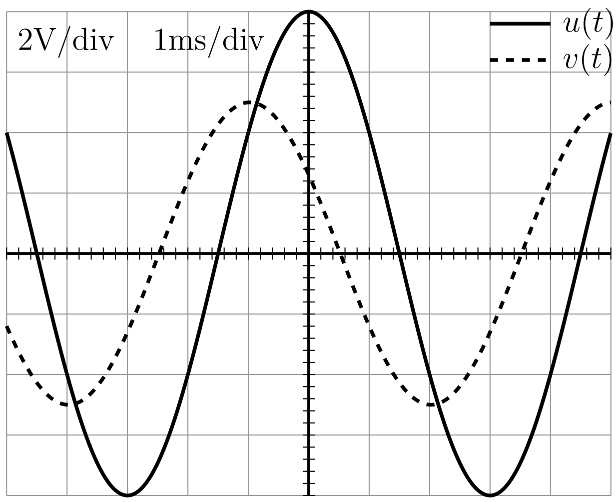
Q7. En déduire la nature de l'impédance du quartz à l'intérieur des différents intervalles de pulsation définis par ω_1 et ω_2. Conclure.

III Résolution de problèmes

Exercice n°6 Nature d'un dipôle inconnu

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension sinusoïdale $e(t)$ de fréquence f.
R est une résistance connue ($R = 100\ \Omega$) et $\mathscr{D}$ un dipôle inconnu.
On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$ avec des calibres identiques sur les deux voies.





Q1. Sachant que le GBF et l'oscilloscope utilisés sont tous les deux munis de prises de terre, quel problème expérimental devra-t-on résoudre pour visualiser simultanément $v(t)$ et $u(t)$?

Q2. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle $\mathscr{D}$.
Déterminer à partir de la courbe les valeurs de X et de Y.

Q3. Par quel dipôle peut-on modéliser $\mathscr{D}$? Donner ses caractéristiques.

IV Extraits du cahier d'entrainement de physique-chimie

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 1.1 — Un entraînement fondamental.

Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + \mathrm{j}b$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(\mathrm{j}\varphi) = Z_0\big(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)\big)$ avec $Z_0 \geqslant 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b. ....

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b. ....

On suppose que $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

....

d) Si $a > 0$ et $b \leqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

....

Entraînement 1.2 — Impédances complexes des composants de base.

Les impédances complexes d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

a) Z_0 de $\underline{Z}_R$. ... c) Z_0 de $\underline{Z}_L$. ... e) Z_0 de $\underline{Z}_C$. ...

b) φ de $\underline{Z}_R$. .... d) φ de $\underline{Z}_L$. .... f) φ de $\underline{Z}_C$. ....

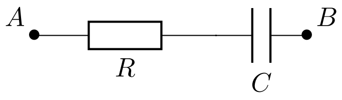
Entraînement 1.3 — Associations de dipôles.

On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

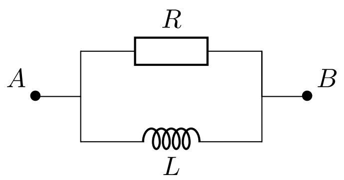
- si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$
- si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \dfrac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{\text{AB}}$ des associations de dipôles suivants :

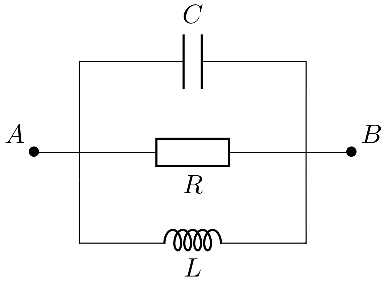
a)



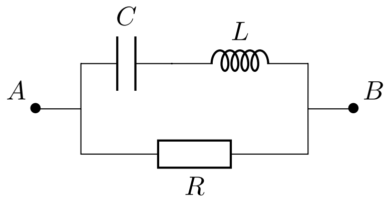
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

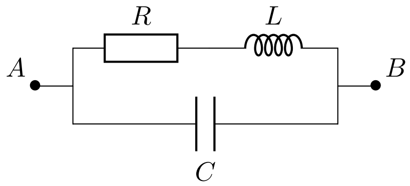
b) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

c) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

d) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

Entraînement 1.4 — À la recherche de la bonne impédance.

Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{\mathrm{AB}}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}$ (b) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}$ (c) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 - \mathrm{j}RC\omega}$

....

Signaux périodiques

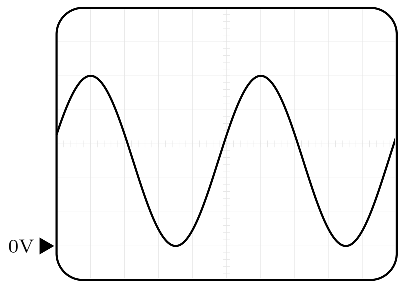
Entraînement 1.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0.

a) f_0 ....

b) U_0 ....



base de temps : 20 µs/division
calibre vertical : 1 V/division

Entraînement 1.6 — Expression d'une tension.

Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1\,\mathrm{ms}$, d'amplitude $U_0 = 2\,\mathrm{V}$ et de phase à l'origine $\varphi = 0\,\mathrm{rad}$.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(b) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

(c) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

....