Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

TD n°8 Filtrage linéaire Filtres passifs

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Filtre RL

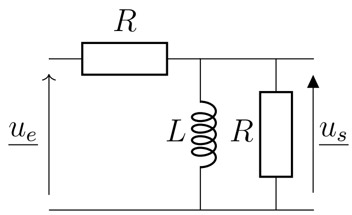
Capacité exigible :

✓ *Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.*

✓ *Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.*

✓ *Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre afin de l'utiliser comme moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.*

On étudie le filtre ci-contre constitué d'une résistance $R = 1,0\ \text{k}\Omega$ et d'une bobine idéale d'inductance L.



Q1. Déterminer la nature du filtre d'après le comportement asymptotique des dipôles.

Q2. Établir sa fonction de transfert.

Q3. Identifier la ou les affirmations fausses concernant la pulsation de coupure d'un filtre :

- ◯ c'est la pulsation de l'intersection des deux asymptotes du diagramme de Bode en gain ;
- ◯ c'est la pulsation pour laquelle le gain en décibels vaut le gain en décibels maximal diminué de 3 décibels ;
- ◯ c'est la pulsation pour laquelle le gain vaut la moitié du gain maximal.

Q4. Établir l'expression de la pulsation de coupure du filtre étudié.

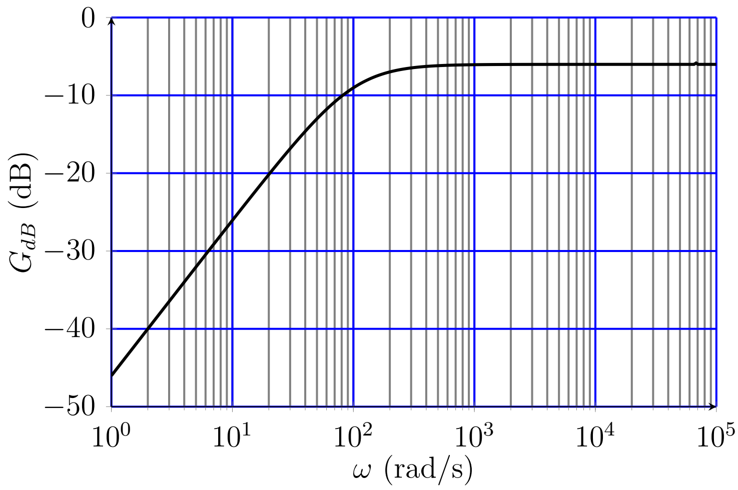
Q5. Trois étudiants ont tracé le diagramme de Bode du circuit mais l'étudiant 1 a inversé la résistance et la bobine, l'étudiant 2 s'est trompé d'une décade en choisissant $R = 0,10\ \text{k}\Omega$, l'étudiant 3 a oublié la résistance en parallèle de la bobine. Seul l'étudiant 4 a fait les choses correctement. Associer à chaque courbe le numéro de l'étudiant. La réponse devra être proprement justifiée.

Q6. Déterminer la valeur de l'inductance de la bobine à l'aide du diagramme de Bode.

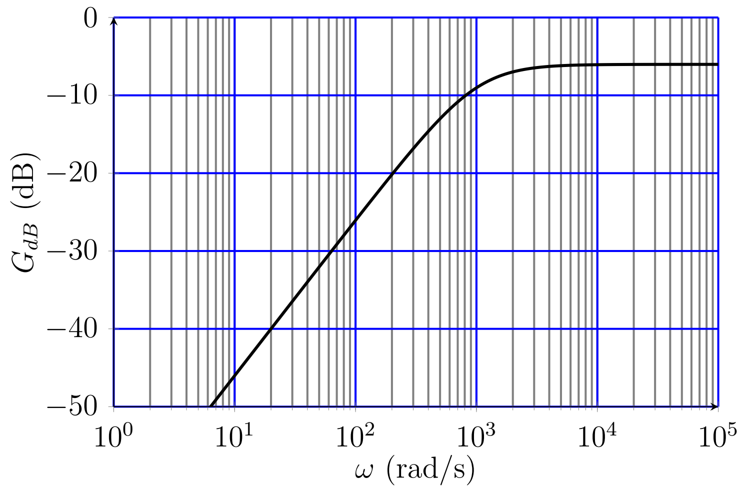
Q7. On impose en entrée la tension $u_e(t) = E\cos\left(\omega_c t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Déterminer complètement la tension de sortie (amplitude et phase à l'origine des temps).

Q8. On impose en entrée la tension $u_e(t) = E_1\cos\left(\omega_1 t + \dfrac{\pi}{4}\right) + E_2\cos\left(\omega_2 t + \dfrac{\pi}{4}\right)$, avec $\omega_1 = \dfrac{\omega_c}{10}$ et $\omega_2 = 10\omega_c$.
Déterminer complètement la tension de sortie. *On pourra se permettre certaines approximations, bien justifiées.*

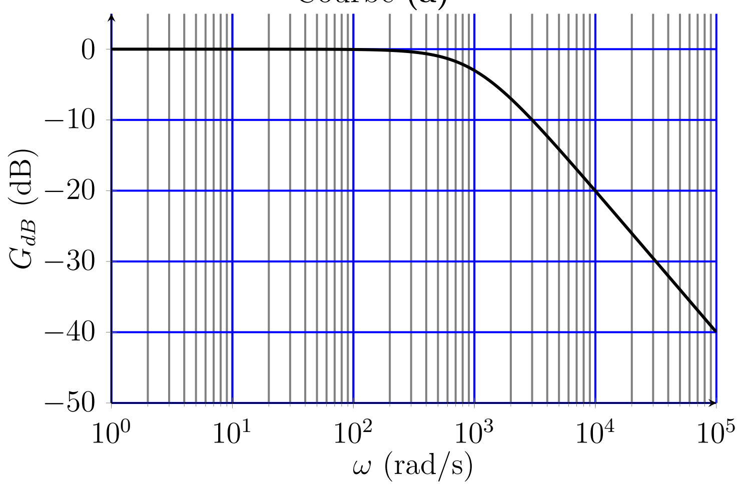
Q9. On note $\omega_c = 1.10^3$ rad $\cdot$ s^{-1}. On impose en entrée une tension triangulaire de pulsation $\omega \ll \omega_c$? Quelle opération réalise le filtre à cette pulsation ? Quelle sera alors l'allure du signal de sortie ?



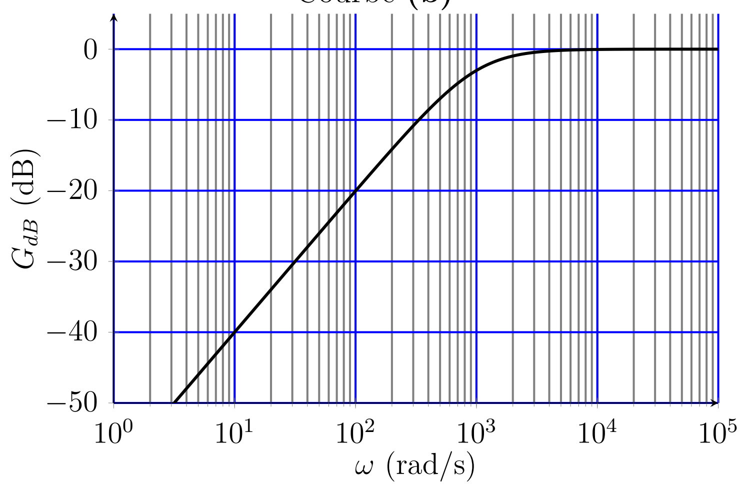
Courbe **(a)**



Courbe **(b)**



Courbe **(c)**



Courbe **(d)**

II Exercices d'approfondissement

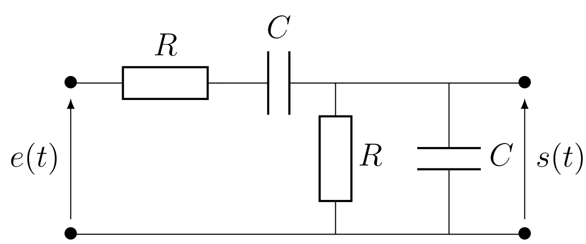
Exercice n°2 Filtre de Wien *(D'après oraux CCINP)*

Capacités exigibles :

✓ *Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.*

✓ *Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.*

On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-dessous.

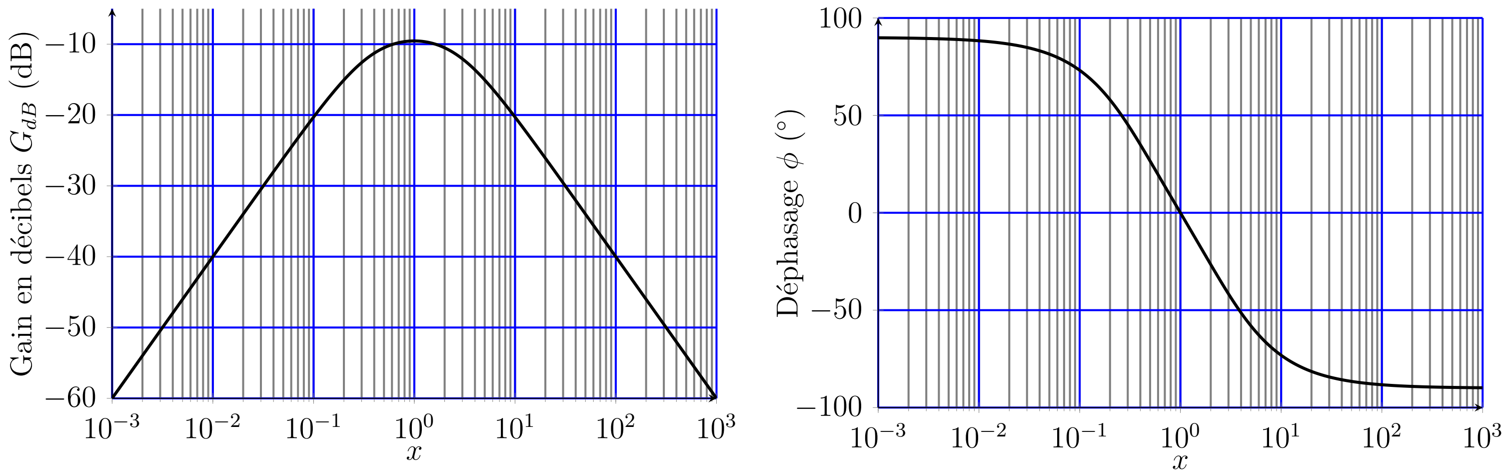


Q1. Par analyse des comportements asymptotiques des dipôles, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

Q2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre et l'écrire sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
Identifier les expressions de ω_0, Q et H_0.

Q3. Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.

Q4. On donne le diagramme de Bode du filtre de Wien ci-dessous.
Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode.



Q5. Déterminer la largeur en fréquence de la bande passante. Retrouver la valeur du facteur de qualité.

Q6. Exprimer le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est
$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t)$ avec $E_0 = 10$ V et $\omega = \dfrac{\omega_0}{10}$.

Exercice n°3 Filtre passe-haut *(D'après Oral Centrale-Supélec PSI)*

Capacité exigible *:*

✓ *Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges*

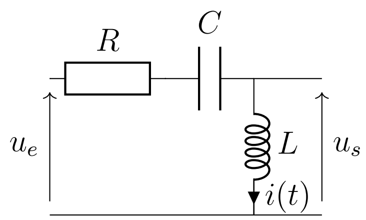
✓ *Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.*

Les deux premières questions sont faciles, et tout le monde doit pouvoir les faire. Seule la dernière question est réellement délicate, et demande un peu d'idées.

On cherche à traiter un signal électrique proche de 300 Hz, comportant un bruit à 50 Hz que l'on veut filtrer. Plus précisément, on souhaite construire un filtre passe-haut présentant une atténuation importante à $f_1 = 50$ Hz ($G_{dB}(f_1) \leq -20$ dB), mais la plus faible possible à $f_2 = 300$ Hz ($G_{dB}(f_2) \geq -0,5$ dB).

Q1. Un filtre passe haut du premier ordre peut-il convenir ? Justifier.

On considère maintenant un filtre passe haut RLC du second ordre, constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

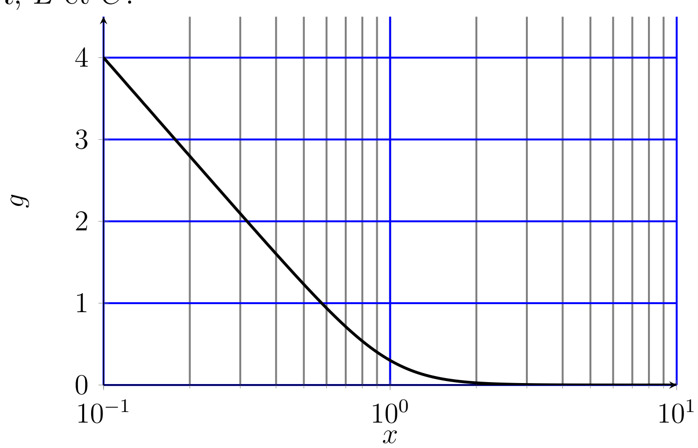


Sa fonction de transfert est donnée par : $\underline{H}(jx) = \dfrac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$, avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Q2. Déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

Q3. Afin d'éviter les distorsions de signal, on souhaite avoir $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Déterminer ω_0, puis la valeur minimale de L, sachant que $C \leq 10^{-6}$ F. Commenter le résultat obtenu.

On exploitera la courbe donnée ci-contre, représentant la fonction $g = \log\left(1 + \dfrac{1}{x^4}\right)$ en fonction de x.



Remarque : le sujet de l'oral de centrale continue avec l'étude d'un filtre passe-haut actif.

Exercice n°4 Transformation d'un triangle

Capacité exigible :

✓ *Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges*

✓ *Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.*

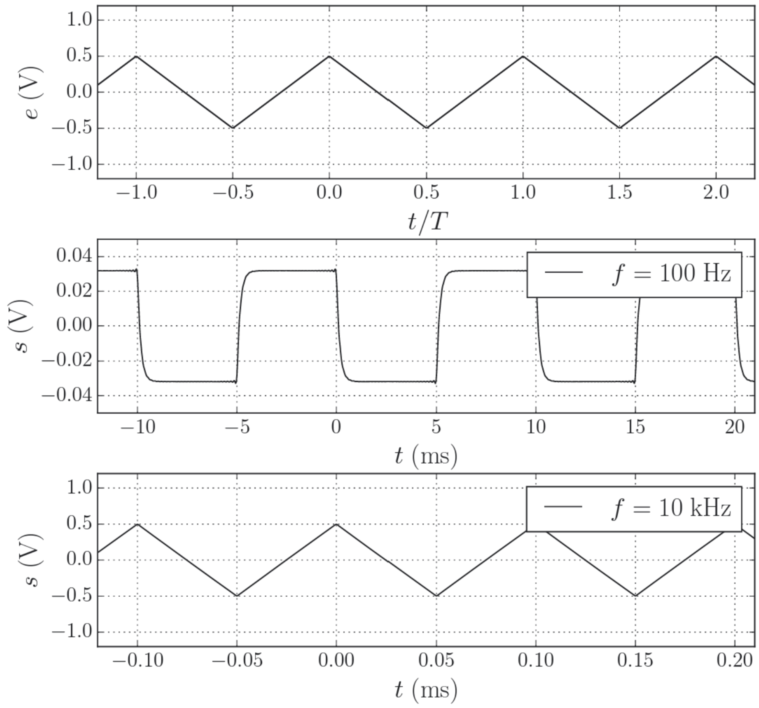
On considère un signal triangle, dont l'allure est représentée ci-après. T représente la période du signal, qu'on pourra faire varier, tout en maintenant l'amplitude constante.
On obtient pour les fréquences $f = 100$ Hz et $f = 10$ kHz les oscillogrammes suivants.

$$\underline{H_1} = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H_2} = \frac{H_0 j\dfrac{f}{f_c}}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H_3} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{f}{f_c} - \dfrac{f_c}{f}\right)}$$

$$\underline{H_4} = \frac{H_0}{1 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{f}{f_c} - \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}$$



Q1. Quelle opération réalise ce filtre pour $f = 100$ Hz ? et pour $f = 10$ kHz ? En déduire la nature du filtre.

Q2. Parmi les fonctions de transferts suivantes, laquelle choisiriez-vous pour décrire ce filtre ?

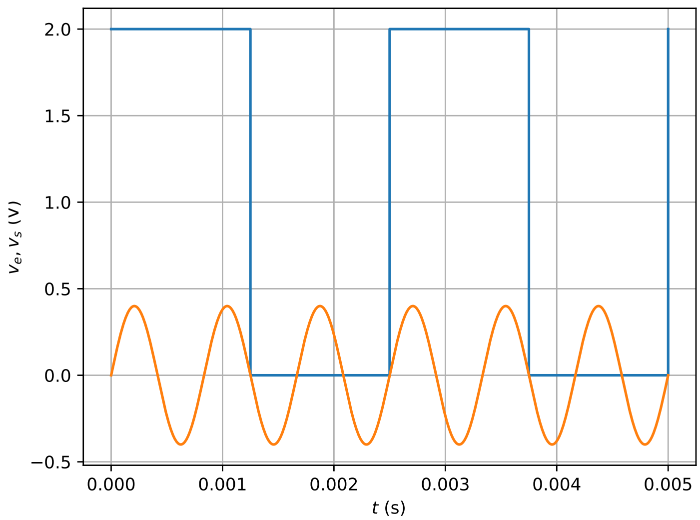
Q3. En vous servant des oscillogrammes fournis, déterminer les paramètres inconnus intervenant dans cette fonction de transfert.

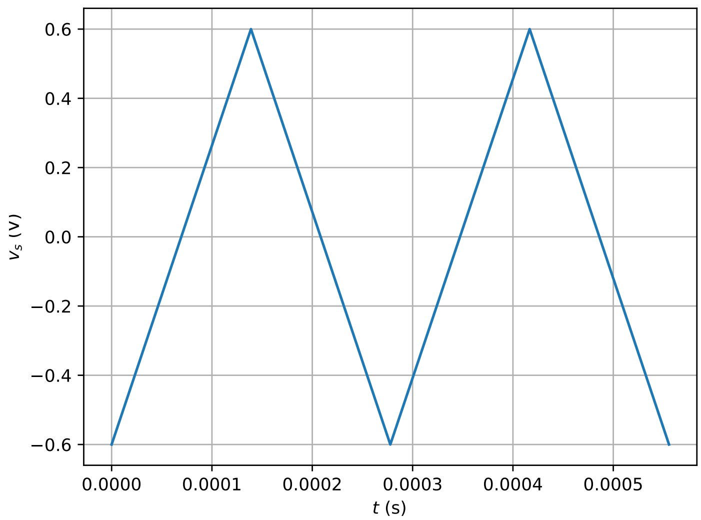
Q4. Proposer un montage simple qui permettrait de réaliser ce filtre. On proposer des valeurs pour les composants.

III Résolution de problème

Exercice n°5 Identification d'un filtre

On soumet un filtre à un signal créneau de fréquence 400 Hz puis 3600 Hz, et on obtient les courbes ci-dessous. Déterminer la nature et les caractéristiques du filtre.





IV Extraits du cahier d'entrainement de physique-chimie

Entraînement 5.7 — Modulation d'amplitude.

On considère un signal modulé, de la forme

$$s(t) = S_0 \cos\left(2\pi f_p t\right) \times \Big(1 + m\cos(2\pi f_0 t)\Big) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a+b) + \cos(a-b)$, trouver une formule pour $\cos(a)\cos(b)$.

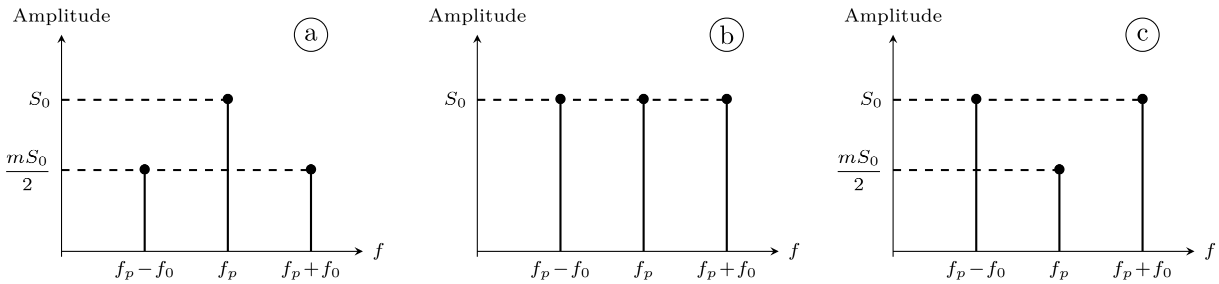
....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous (a, b ou c) est celui du signal $s(t)$.



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$ ....

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$ ..

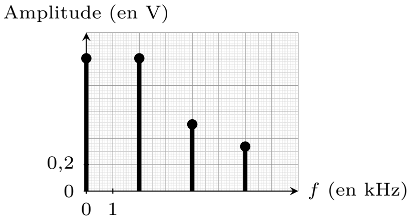
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$ ..

f) Déterminer le spectre (a, b ou c) correspondant à $s(t)$ ....

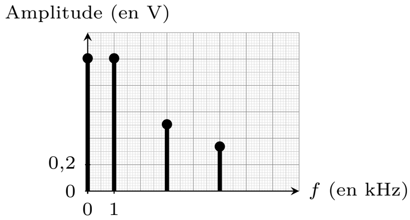
Entraînement 5.8 — Pêle-mêle.

Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre (a, b, c ou d) ?

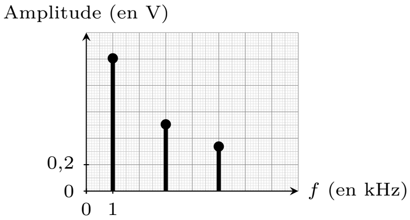
Spectre a



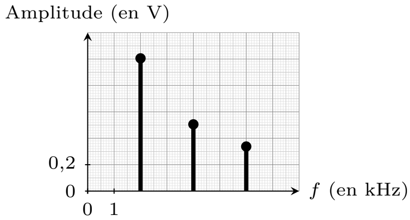
Spectre b



Spectre c



Spectre d



Signal n° 1	**Signal n° 2**
$A_1\left(\cos(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t)+\frac{1}{3}\cos(5\omega_0 t)\right)$ avec $A_1 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz	$A_2\left(1+\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)\right)$ avec $A_2 = 1$ V et $f_0 = 2$ kHz
Signal n° 3	**Signal n° 4**
$A_3\Big(\cos((\omega_0-\omega_1)t)+\frac{1}{2}\cos((\omega_0+\omega_1)t) + \frac{1}{3}\cos((\omega_0+3\omega_1)t)\Big)$ avec $A_3 = 1$ V, $f_0 = 3$ kHz et $f_1 = 1$ kHz	$A_4\left(1+\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{3}\sin(5\omega_0 t)\right)$ avec $A_4 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz

a) Spectre du signal n° 1 ....

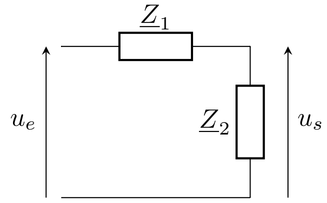
b) Spectre du signal n° 2 ....

c) Spectre du signal n° 3 ....

d) Spectre du signal n° 4 ....

Fonctions de transfert

Entraînement 5.9 — Filtre passe-bande.



Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47\,\mathrm{nF} \text{ et } R = 1\,\mathrm{k\Omega}.$$

Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ ....

b) Identifier H_0 ....

c) Identifier Q ....

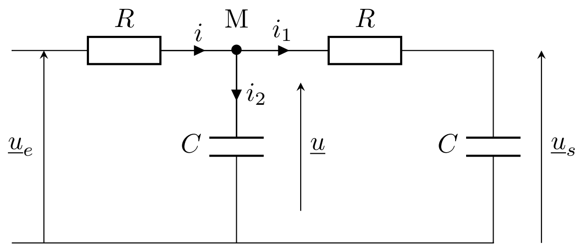
d) Identifier et calculer ω_0 .

Entraînement 5.10 — Filtre du second ordre.

Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1+\frac{\mathrm{j}x}{Q}-x^2}$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ et $R = 220\,\Omega$.



Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \qquad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \qquad \text{et} \qquad R\underline{i}_2 = \mathrm{j}RC\omega\underline{u}.$$

a) À l'aide de la loi des noeuds, exprimer $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$. ....

b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer $\underline{u}_e$ en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{u}_s$.

....

L'étudiant montre grâce à un pont diviseur de tension que $\underline{u} = (1+\mathrm{j}RC\omega)\underline{u}_s$.

c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$. ....

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ donnée, identifier

d) H_0 ....

e) ω_0 ....

f) Q ....

Entraînement 5.14 — Calcul de gain.

Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x = 1$.

a) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1-\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$ ....

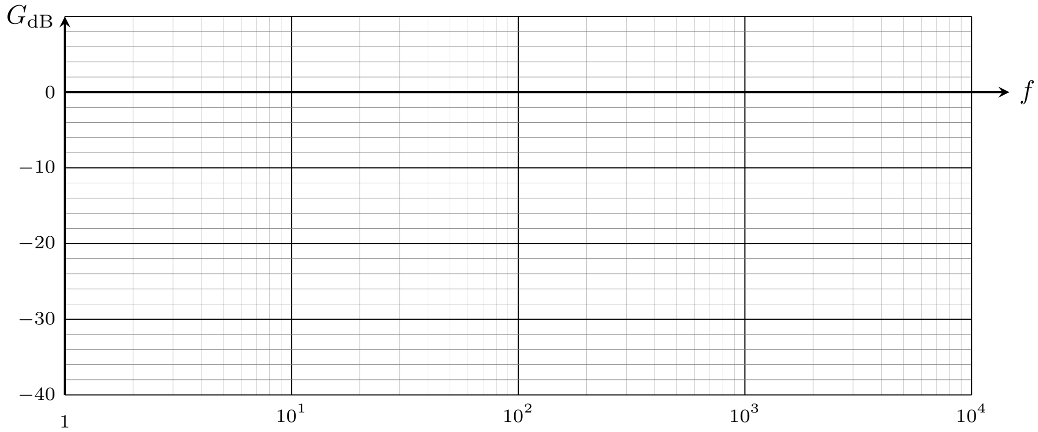
b) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = -\dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$ ....

c) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1}{1+2\mathrm{j}mx+(\mathrm{j}x)^2}$ avec $m = 2$ ....

Entraînement 5.15 — Tracé sur papier semi-logarithmique.

Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibel est donnée par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\dfrac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}}\right)$.

Calculer le gain en décibel pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

a) Point A : $f = 200\,\text{Hz}$. ....

b) Point B : $f = 700\,\text{Hz}$. ....

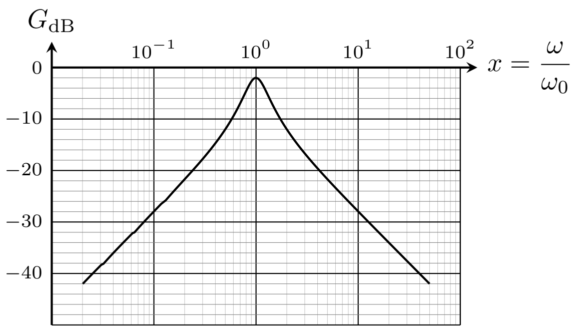
c) Point C : $f = 2\,000\,\text{Hz}$. ....

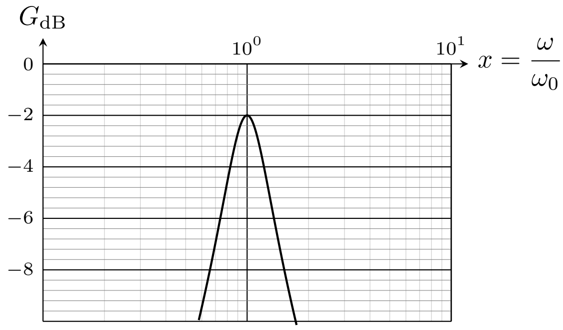
d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C. ....

Entraînement 5.16 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.

On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15\,\text{kHz}$, dont les deux fréquences de coupure à $-3\,\text{dB}$ sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r.

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.





À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre.

a) f_r .... b) f_{c1} .... c) f_{c2} ....