



Thème I. Ondes et signaux

Chapitre n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé



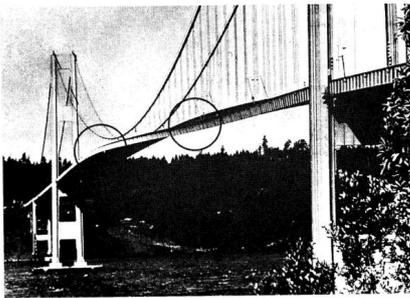
Résonance d'une balançoire : l'amplitude des oscillations est maximale lorsque les parents poussent « à la bonne fréquence » la balançoire.



Résonance d'un verre : lorsqu'il est soumis à une onde sonore de fréquence égale à sa fréquence propre, l'amplitude des oscillations du verre augmente, il peut alors éclater.

Vidéo : « breaking a wine glass using resonance »

<https://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E>



Le pont de Tacoma était un pont suspendu au-dessus du détroit de Tacoma mis en service le 1^{er} juillet 1940, dès la construction on s'est rendu compte que le pont était très flexible. Le 7 novembre 1940 un vent important a fait osciller le pont avec une amplitude dépassant 1m. L'un des câbles a lâché et l'oscillation verticale s'est transformée en torsion, ce qui a causé l'écroulement du pont. Plusieurs explications ont été proposées : rafales de fréquence égale à la fréquence de résonance, création de tourbillons. Il semblerait que la combinaison des deux phénomènes soit à l'origine de l'écroulement.

Vidéo « Pont Tacoma – Résonance mécanique »

https://www.youtube.com/watch?v=uhWQ5zr5_xc

Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
 - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
 - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux.
 - Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.
 - Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis

Objectifs du chapitre

- Introduire la représentation complexe des signaux sinusoïdaux.
- Introduire les notions nécessaires à l'étude des circuits linéaires alimentés en régime sinusoïdal.
- Résoudre, en régime forcé, et en utilisant la représentation complexe les équations différentielles du type :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = A_m \cos(\omega t)$$

- Étudier le phénomène de résonance des deux systèmes étudiés dans le chapitre précédent.

Plan du cours

I Oscillateur mécanique en RSF	2
I.1 Observations expérimentales	3
I.2 Mise en équation	3
I.3 RT et RSF	4
I.4 Représentation complexe	6
I.4.a) Définition	6
I.4.b) Opérations	8
I.5 Résonance en élongation	9

II Étude de circuits linéaires en RSF	14
II.1 Impédances	14
II.2 Lois des nœuds et des mailles en RSF . .	19
II.3 Associations d'impédances	19
II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF	20
III Résonances dans un circuit RLC série	21
III.1 Résonance en tension aux bornes de C .	21
III.2 Résonance en intensité	23

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. [TP] Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance. [TP] Mettre en œuvre une démarche expérimentale visant à caractériser des régimes transitoires du premier ou du second ordre (flash, sismomètre, etc.).

Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😞 – Définir la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.
- 2 – 😊 – 😞 – Donner l'expression de la dérivée et de la primitive de la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.
- 3 – 😊 – 😞 – Établir l'équation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort, dont le point d'attache est animé d'un mouvement sinusoïdal.
- 4 – 😊 – 😞 – Déterminer, à partir de l'équation différentielle, l'expression de l'amplitude complexe de la réponse à l'excitation sinusoïdale.
- 5 – 😊 – 😞 – Déterminer la pulsation de résonance de la réponse en élongation.
- 6 – 😊 – 😞 – Établir les expressions des impédances complexes des dipôles R , L et C .
- 7 – 😊 – 😞 – Donner les expressions des impédances complexes des dipôles R , L et C .
- 8 – 😊 – 😞 – Donner les comportements asymptotiques (à basse et haute fréquences) du condensateur et de la bobine.
- 9 – 😊 – 😞 – Donner l'expression de l'impédance complexe équivalente d'une association série ou parallèle de deux impédances.
- 10 – 😊 – 😞 – Donner les relations du pont diviseur de tension pour deux impédances en série et de courant pour deux impédances en parallèle.
- 11 – 😊 – 😞 – Établir les expressions des amplitudes complexes de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans le RLC série.
- 12 – 😊 – 😞 – Déterminer les pulsations de résonance en tension et en intensité dans le RLC série.

I Oscillateur mécanique en RSF

I.1 Observations expérimentales

Capacité exigible : Mettre en œuvre un dispositif expérimental autour du phénomène de résonance.

Expérience

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

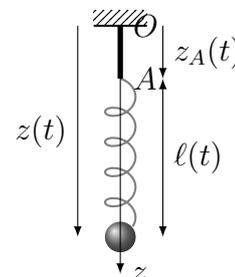
On étudie le dispositif ci-contre, constitué d'une masse m accrochée à un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est mise en oscillation par un dispositif extérieur.

Le point A d'attache du ressort oscille à la pulsation ω avec

$$\vec{OA}(t) = z_A(t)\vec{e}_z = Z_{Am} \cos(\omega t)\vec{u}_z.$$

Les frottements exercés par l'air sur le système sont modélisés par la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, avec α une constante positive qui dépend du fluide.

Qu'observez-vous? Noter ce qu'il se passe à basse fréquence, pour des fréquences intermédiaires et à haute fréquence.



Définition : phénomène de résonance

On dit qu'un système excité périodiquement présente une **résonance** pour une grandeur physique lorsque l'**amplitude** de celle-ci admet un **maximum** pour une fréquence particulière de l'excitation appelée **fréquence de résonance**.

I.2 Mise en équation

Équation du mouvement

R1. On étudie l'équilibre de $M(m)$, en l'absence d'excitation sinusoïdale tel que $\forall t, z_A(t) = 0$. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$.

Solution: Système : Point matériel $M(m)$

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
- force de rappel élastique $\vec{f}_{\text{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$
- force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

À l'équilibre, la somme des forces est nulle et $\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{f}_{\text{él}} &= \vec{0} \\ mg\vec{u}_z - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{u}_z &= \vec{0} \\ k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) &= mg \\ \ell_{\text{éq}} &= \frac{mg}{k} + \ell_0 \end{aligned}$$

à l'équilibre $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

R2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, z_A, z, ℓ_0 et \vec{u}_z .

Solution:

Longueur du ressort : $\ell(t) = z(t) - z_A(t)$

Ainsi $\boxed{\vec{f}_{\text{el}} = -k(z(t) - z_A(t) - \ell_0)\vec{u}_z}$

R3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$.

Solution:

On applique le principe fondamental de la dynamique à $M(m)$ dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{f} + \vec{f}_{\text{el}} \\ m\ddot{z}\vec{u}_z &= mg\vec{u}_z - \alpha\dot{z}\vec{u}_z - k(z(t) - z_A(t) - \ell_0)\vec{u}_z \\ m\ddot{z} &= mg - \alpha\dot{z} - kz(t) - kz_A(t) + k\ell_0 \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= \underbrace{mg + k\ell_0}_{=k\ell_{\text{eq}}} + kz_A(t) \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= kz_A(t) + k\ell_{\text{eq}} \end{aligned}$$

On repère la position de la masse M à partir de sa position d'équilibre en utilisant la variable Z telle que $Z(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$.

R4. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.

La mettre sous forme canonique

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 z_A(t)$$

identifier les expressions de ω_0 et Q .

Solution:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= kz_A(t) + k\ell_{\text{eq}} \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) &= \frac{k}{m}z_A(t) + \frac{k}{m}\ell_{\text{eq}} \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}(z(t) - \ell_{\text{eq}}) &= \frac{k}{m}z_A(t) \\ \ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z(t) &= \frac{k}{m}z_A(t) \end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

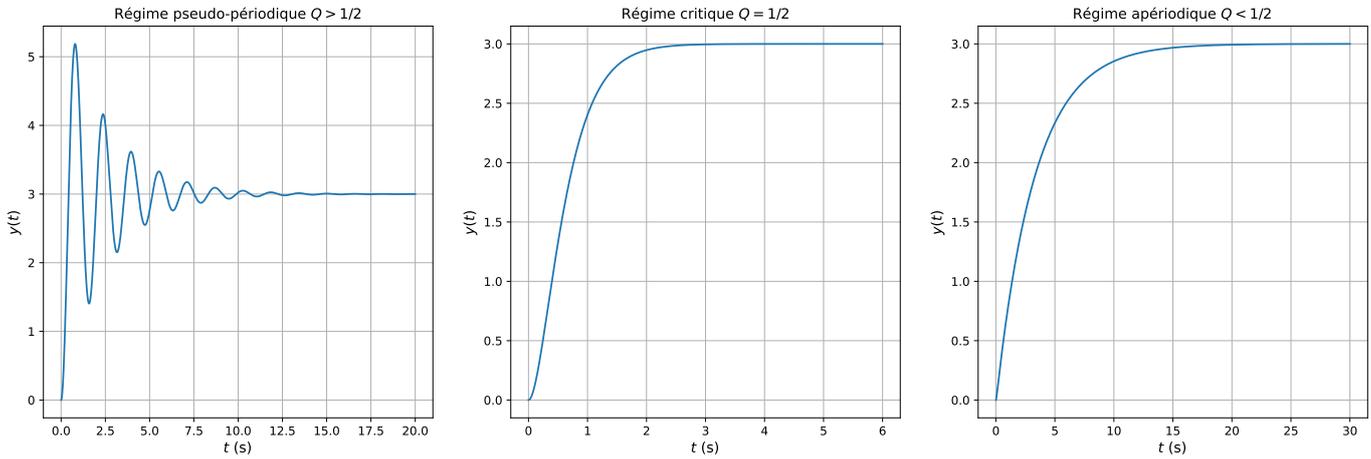
et le facteur de qualité Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{m}{\alpha} \times \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$

I.3 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

AVANT (chapitre précédent) ...

Nous avons étudié l'évolution des oscillateurs amortis soumis à un **régime permanent constant**, dont l'équation différentielle s'écrivait $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y(t) = A_0$, avec un second membre A_0 constant (nul ou non nul).

Nous observons alors un régime transitoire (qui correspond à la solution de l'équation homogène) qui pouvait être pseudo-périodique, apériodique ou critique, suivant la valeur du facteur de qualité :



Ce régime transitoire disparaissait plus ou moins rapidement (au bout de quelques τ le temps de relaxation) pour finalement laisser place au régime établi permanent (constant), puisque le second membre était constant.

MAINTENANT ... Nous allons désormais soumettre les oscillateurs à une excitation sinusoïdale de pulsation ω :

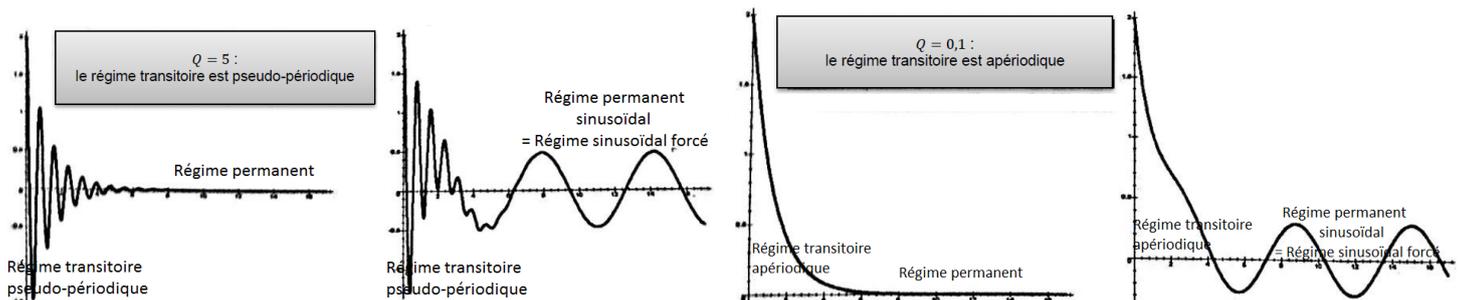
- Pour l'oscillateur mécanique, il est excité sinusoïdalement : § I
- Pour l'oscillateur électrique, le dipôle (R,L,C) série est alimenté par un générateur délivrant une tension $e(t)$ sinusoïdale : § III

Nous venons d'obtenir la même équation différentielle qu'au chapitre précédent, à part que le second membre a changé, c'est maintenant une fonction sinusoïdale : $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y(t) = A_m \cos(\omega t)$

La solution générale s'écrit alors $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, avec :

- $y_H(t)$ la solution générale de l'équation homogène.
Cette solution a déjà été déterminée au chapitre précédent. Elle correspond au régime transitoire qui disparaît au bout d'un certain laps de temps : $\lim_{t \gg \tau} y_H(t) = 0$.
- $y_P(t)$ la solution particulière, qui correspondra donc au régime permanent. On la cherche sous la même forme que le second membre, donc sous la forme d'une fonction sinusoïdale : $y_P(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$

En régime permanent (pour $t > \gg \tau$), $y_H(t) \approx 0$, et donc : $y(t) \approx y_P(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$



Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons pas au régime transitoire, mais uniquement au régime permanent sinusoïdal, appelé « régime sinusoïdal forcé ».

Dans le cas de l'oscillateur mécanique, la réponse en régime établi $Z(t) = Z_p(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ comporte **deux inconnues** : l'amplitude Z_m et la phase à l'origine φ .

On pourrait déterminer Z_P de la même façon que lorsque le second membre est constant : injecter $Z_P(t)$ dans l'équation différentielle et déterminer les inconnues (Z_m et φ). Contrairement au cas du second membre constant, le calcul serait ici long et compliqué.

But de la résolution : déterminer l'amplitude $Z_m(\omega)$ et la phase à l'origine $\varphi(\omega)$ qui dépendent de la pulsation de l'excitation.

♥ À retenir : Système linéaire en régime sinusoïdal forcé

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son « entrée » $e(t)$ est imposée (« forcée »), et du type sinusoïdal : $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$.

Les systèmes étudiés sont linéaires, donc si le signal d'entrée est sinusoïdal, alors le signal de sortie l'est également et à la même pulsation, mais avec une amplitude et une phase à l'origine des temps différentes :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \xrightarrow{\text{système linéaire}} s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$$

L'objectif du chapitre est de déterminer S_m et φ_s .

1.4 Représentation complexe

1.4.a) Définition

♥ À retenir : Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

À tout signal sinusoïdal

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

on associe la **représentation complexe** :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Le signal complexe n'a pas de réalité physique, c'est uniquement un outil. La partie réelle de $\underline{s}(t)$ redonne le signal s : $s(t) = \Re(\underline{s})$

$$\begin{aligned} s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) &\longrightarrow \underline{s} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \underline{s} &= S_m e^{j\omega t + j\varphi} \\ \underline{s} &= S_m e^{j\omega t} \times e^{j\varphi} \\ \underline{s} &= \underbrace{(S_m e^{j\varphi})}_{=\underline{S}_m} \times e^{j\omega t} \end{aligned}$$

♥ À retenir : Amplitude et phase à l'origine des temps

■ On introduit l'**amplitude complexe**, notée \underline{S}_m telle que

$$\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{S}_m = S_m e^{j\varphi}$$

■ L'**amplitude** S_m de $s(t)$ est le **module** de \underline{S}_m :

$$S_m = |\underline{s}(t)| = |\underline{S}_m|$$

■ La **phase à l'origine** φ de $s(t)$ est l'**argument** de \underline{S}_m :

$$\varphi = \arg(\underline{S}_m)$$

Ainsi la connaissance de l'amplitude complexe \underline{S}_m donne accès aux deux grandeurs inconnues du signal $s(t)$: l'amplitude S_m et la phase à l'origine des temps φ .

Exercice de cours A Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

$E, \omega, \tau, \omega_0, Q$ sont des réels positifs.

R1. Donner le signal complexe associé aux signaux suivants et identifier l'amplitude complexe.

(a) $e(t) = E \cos(\omega t + \pi/3)$

Solution: $\underline{e} = E e^{j(\omega t + \pi/3)} = \underline{E} e^{j\omega t}$, avec $\underline{E} = E e^{j\pi/3}$

(b) $u(t) = \frac{U_0 R}{R+r} \sin(\omega(t-t_0))$

Solution:

On utilise, en s'appuyant sur un cercle trigo, $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$

Ainsi $u(t) = \frac{U_0 R}{R+r} \cos(\omega(t-t_0) - \pi/2)$

$\underline{u} = \frac{U_0 R}{R+r} e^{j(\omega(t-t_0) - \pi/2)} = \underline{U} e^{j\omega t}$, avec $\underline{U} = \frac{U_0 R}{R+r} e^{-j(\omega t_0 + \pi/2)}$

Soit $\underline{U} = -j \frac{U_0 R}{R+r} e^{-j\omega t_0}$

(c) $i(t) = -I_m \sqrt{2} \cos(\omega t)$

Solution: $\underline{i} = -I_m \sqrt{2} e^{j\omega t} = I_m \sqrt{2} e^{j(\omega t - \pi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$, avec $\underline{I}_m = I_m e^{-j\pi}$

R2. Donner le signal réel associé aux signaux d'amplitudes complexes suivantes :

(a) $\underline{U}_L = U_m e^{-j\pi/3}$

Solution: L'amplitude est U_m et la phase $-\frac{\pi}{3}$, donc le signal réel s'écrit $u_L(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/3)$

(b) $\underline{I}_1 = -j \frac{U_0}{R}$

Solution: Amplitude complexe : $\underline{I}_1 = \frac{U_0}{R} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, soit d'amplitude $\frac{U_0}{R}$ et de phase $-\frac{\pi}{2}$

Le signal s'écrit $i_1(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$

(c) $\underline{I}_2 = -I_m e^{j\pi/6}$

Solution:

$\underline{I}_2 = I_m e^{-j\pi} e^{j\pi/6} = I_m e^{-5\pi/6}$, d'amplitude I_m et de phase $-\frac{5\pi}{6}$, donc $i_2(t) = I_m \cos(\omega t - 5\pi/6)$

R3. Donner le module des complexes ci-dessous.

(a) $\underline{U}_m = \frac{E}{1 + j\omega\tau}$

Solution: $|\underline{U}_m| = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

(b) $\underline{u} = \frac{E j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$

Solution: $|\underline{u}| = \frac{E\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

(c) $\underline{U}_m = \frac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

Solution: $|U_m| = \frac{E\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2}}$

R4. Donner l'expression de $\tan(\varphi)$ avec φ l'argument de U_m .

(a) $U_m = \frac{E}{1 + j\omega\tau}$

Solution: $\tan(\varphi) = -\omega\tau$

(b) $U_m = \frac{Ej\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$

Solution: $\tan(\varphi) = \omega\tau$

(c) $U_m = \frac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

Solution: $\tan(\varphi) = \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}$

(d) $U_m = \frac{E}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Solution: $\tan(\varphi) = -\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}$

I.4.b) Opérations

Exercice de cours B Dérivée et primitive

On considère un signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ de représentation complexe $\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t}$

R1. Calculer la dérivée de \underline{s} et la relier à \underline{s} .

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{s}}{dt} &= \frac{d(\underline{S}_m e^{j\omega t})}{dt} \\ &= \underline{S}_m \times j\omega e^{j\omega t} \\ &= j\omega \times \underline{s} \end{aligned}$$

R2. Faire de même pour la primitive.

Solution: De la même façon : $\int \underline{s} dt = \frac{\underline{s}}{j\omega}$

♥ **À retenir : Opérations à l'aide de la représentation complexe**

■ Dériver un signal complexe revient à le multiplier par $j\omega$.

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \times \underline{s}$$

■ **Primitiver** un signal complexe revient à le diviser par $j\omega$.

$$\int \underline{s} dt = \frac{\underline{s}}{j\omega}$$

■ La **somme** de $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ est d'amplitude complexe

$$\underline{S}_m = \underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m} = S_{1m} e^{j\varphi_1} + S_{2m} e^{j\varphi_2}$$

L'amplitude de $s_1(t) + s_2(t)$ s'obtient avec $S_m = |\underline{S}_m| = |\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m}|$

⚠ Attention

Il est formellement interdit d'utiliser la représentation complexe pour les équations non-linéaires. Notamment, il est interdit d'utiliser la représentation complexe pour les grandeurs énergétiques qui sont toutes non-linéaires. Pour toute étude énergétique il faut donc revenir à la notation réelle.

1.5 Résonance en élongation

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

🔧 Étude de la résonance en élongation

On étudie la réponse de l'oscillateur mécanique régi par l'équation différentielle $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A$,

avec $z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$

Introduction de la représentation complexe

R1. Proposer une expression de la solution $Z(t)$ en régime sinusoïdal forcé (régime établi, après le régime transitoire).

R2. Donner les représentations complexes de $z_A(t)$ et de $Z(t)$ et introduire l'amplitude complexe \underline{Z}_m de $\underline{Z}(t)$.

Solution: $z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t) \longrightarrow \underline{z}_A(t) = Z_{Am} e^{j\omega t}$
 $Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{Z}(t) = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{Z_m e^{j\varphi}}_{=\underline{Z}_m} \times e^{j\omega t}$, soit $\underline{Z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$

R3. Passer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ en représentation complexe et en déduire l'expression de \underline{Z}_m en fonction de ω_0 , Q , ω et Z_{Am} .

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) &= \omega_0^2 z_A(t) \\ \frac{d^2 \underline{Z}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{Z}}{dt} + \omega_0^2 \underline{Z}(t) &= \omega_0^2 \underline{z}_A(t) \\ (j\omega)^2 \underline{Z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{Z} + \omega_0^2 \underline{Z} &= \omega_0^2 \underline{z}_A \\ -\omega^2 \underline{Z}_m e^{j\omega t} + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \underline{Z}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{Z}_m e^{j\omega t} &= \omega_0^2 Z_{Am} e^{j\omega t} \\ \underline{Z}_m \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \right) &= \omega_0^2 Z_{Am} \end{aligned}$$

soit
$$\underline{Z}_m = \frac{\omega_0^2 Z_{Am}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

Étude des situations limites

Par convention, on choisit $\varphi \in [-\pi, \pi[$.

R4. Exprimer les équivalents de \underline{Z}_m quand $\omega \ll \omega_0$ et quand $\omega \gg \omega_0$. Au dénominateur de \underline{Z}_m , on gardera LE terme dominant.

En déduire les limites de $Z_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$. Commenter physiquement les deux cas limites.

Solution:

À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), le terme dominant au dénominateur est ω_0^2 , donc : $\underline{Z}_m \approx \frac{Z_{Am} \omega_0^2}{\omega_0^2}$, soit

$$\underline{Z}_m \approx Z_{Am} \in \mathbb{R}^+$$

Ainsi $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_m = Z_{Am}$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$

Quand l'excitation est effectuée à une fréquence très faible devant la fréquence propre, le système a le temps de répondre et de suivre l'excitation.

à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), le terme dominant au dénominateur est ω^2 , donc : $\underline{Z}_m \approx \frac{Z_{Am} \omega_0^2}{-\omega^2} \in \mathbb{R}^-$

Ainsi $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_m = 0$

$\underline{Z}_m \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \varphi = \pm\pi$

L'excitation est tellement rapide, que le système n'a pas le temps de réagir à l'excitation et oscille avec une amplitude très faible, et en opposition de phase par rapport à l'excitation.

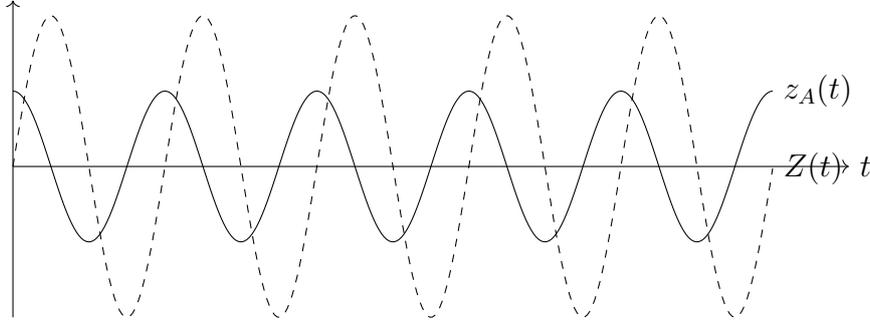
R5. Exprimer $\underline{Z}_m(\omega_0)$. En déduire $Z_m(\omega_0)$ et $\varphi(\omega_0)$. Commenter.

Solution: $\underline{Z}_m(\omega_0) = \frac{Z_{Am}Q}{j} = -jQZ_{Am} \in j\mathbb{R}^-$, donc $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$

Dans ce cas : $z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$ et $Z(t) = Z_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = Z_m \sin(\omega t)$

Soit $Z(t) = QZ_{Am} \sin(\omega t)$

On dit que la réponse est **en quadrature de phase** avec l'excitation : quand l'une est extrême, l'autre est nulle.



On dit que $Z(t)$ est **en retard** sur $z_A(t)$:

On regarde deux maxima consécutifs les plus proches de $Z(t)$ et $z_A(t)$, et on regarde lequel de $Z(t)$ ou de $z_A(t)$ atteint le maximum en premier : c'est le signal en avance.

Ici $Z(t)$ est maximal après $z_A(t)$ (**en lisant de gauche à droite!!!**), donc $Z(t)$ est en retard sur $z_A(t)$.

Résonance en élongation

R6. Exprimer l'amplitude $Z_m(\omega)$ de l'élongation. Introduire la fonction g telle que $Z_m(\omega) = \frac{Z_{Am}\omega_0^2}{\sqrt{g(\omega)}}$.

Solution: L'amplitude Z_m est le module de l'amplitude complexe :

$$Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{\omega_0^2 Z_{Am}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{(\omega_0 \omega)^2}{Q^2}}}$$

R7. Montrer qu'il se produit une résonance pour une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q , à condition que Q vérifie une certaine condition.

Pour cela on pourra établir le tableau de variation de g puis de Z_m .

Solution: Z_m et g varient de façon opposée. Étudions g et nous pourrons en déduire les variations de Z_m .

$$g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega^2$$

$$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega$$

$$g'(\omega) = 4\omega \left(\frac{\omega_0^2}{2Q^2} - \omega_0^2 + \omega^2 \right)$$

$$= 4\omega \left(\omega^2 - \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right)$$

$$g'(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ou } \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)$$

g présente un extrémum local à condition que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 2Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

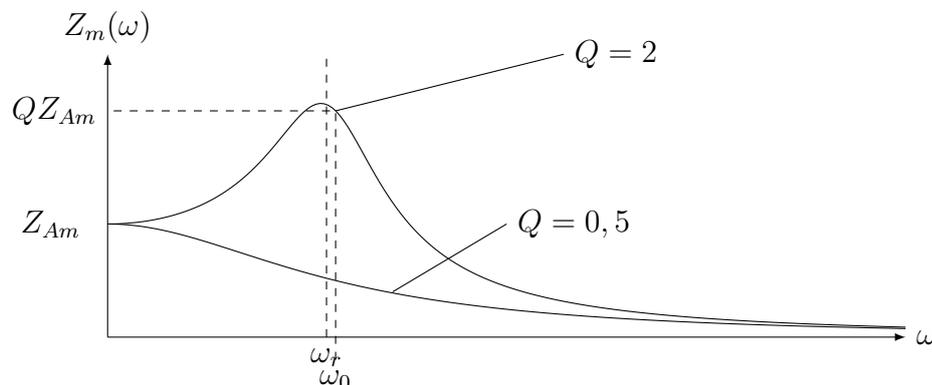
Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors pour tout ω , $g'(\omega) > 0$, donc g est croissante, donc Z est décroissante.

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

ω	0	ω_r	$+\infty$
$g'(\omega)$		-	+
g	ω_0^2		$+\infty$
Z_m	Z_{Am}		0

R8. Tracer l'allure de $Z_m(\omega)$ pour différentes valeurs de Q .

Solution:



R9. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur la résonance d'élongation ?

Solution:

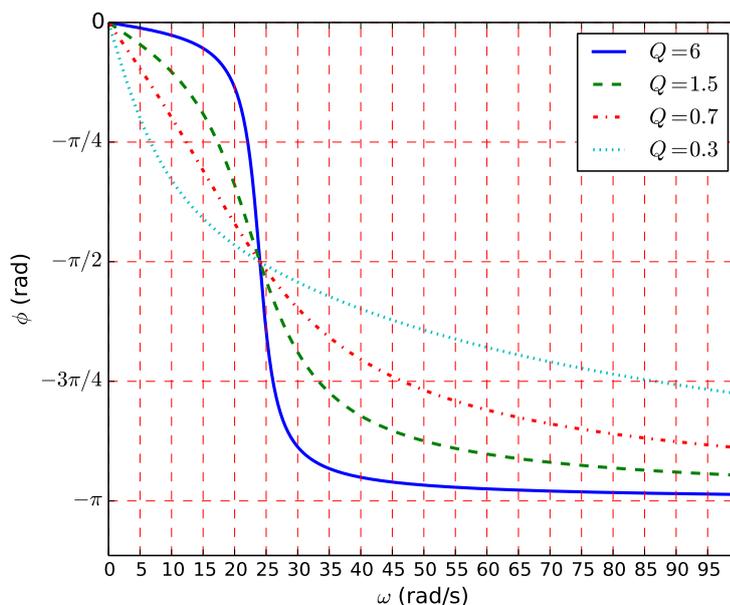
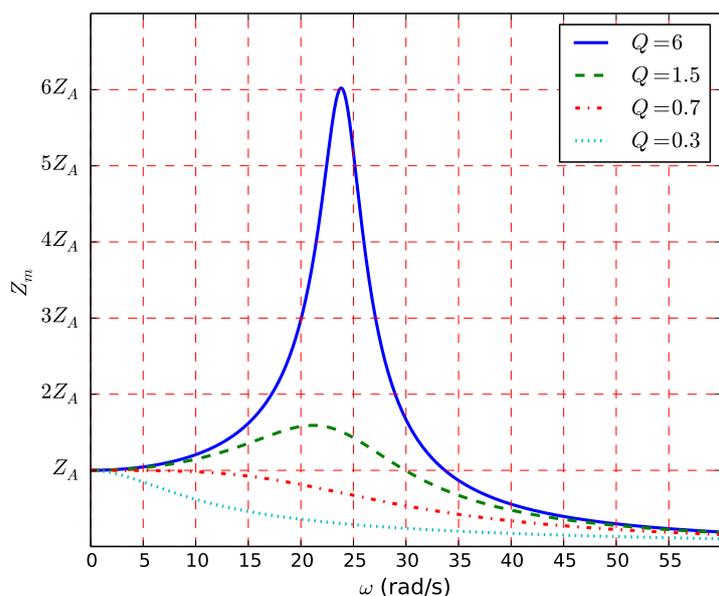
- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors il ne se produit pas de résonance en élongation. Quand la fréquence d'excitation est élevée, l'amplitude de la réponse diminue et est toujours inférieure à l'amplitude de l'excitation.
- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors il se produit une résonance pour la pulsation de l'excitation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$.
- Si $Q \gg 1$ (en pratique $Q > 3$), alors $\omega_r \approx \omega_0$, et $Z_m(\omega_r) \approx Z_m(\omega_0) = QZ_{Am} \gg Z_{Am}$
À la résonance, l'amplitude de la réponse est très grande devant l'amplitude de l'excitation, ce qui peut provoquer la rupture du système.

Étude du déphasage

R10. Tracer l'allure de $\varphi(\omega)$.

Solution: Cf courbes ci-dessous

Capacité exigible : Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.



Capacité exigible : Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Méthode : Comment déterminer graphiquement ω_0 et Q ?

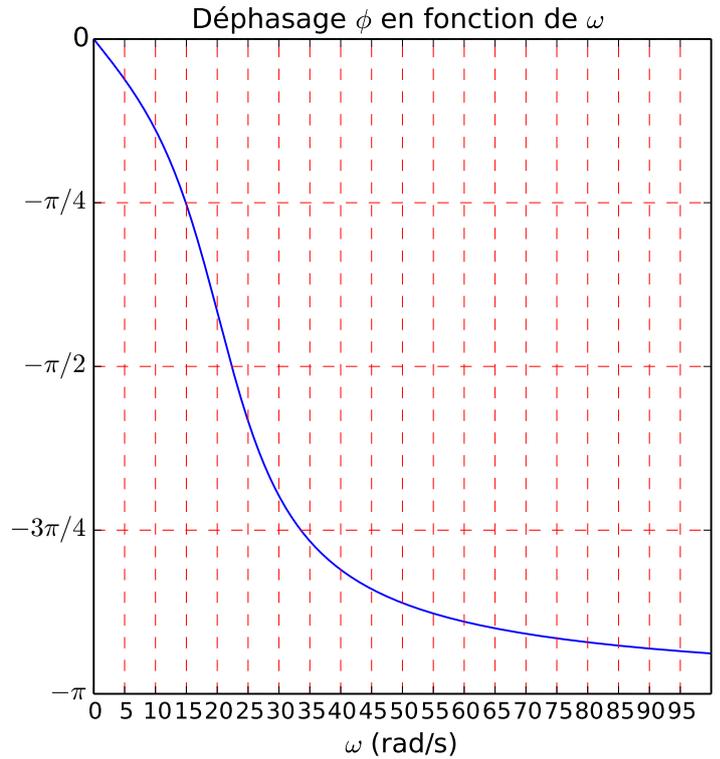
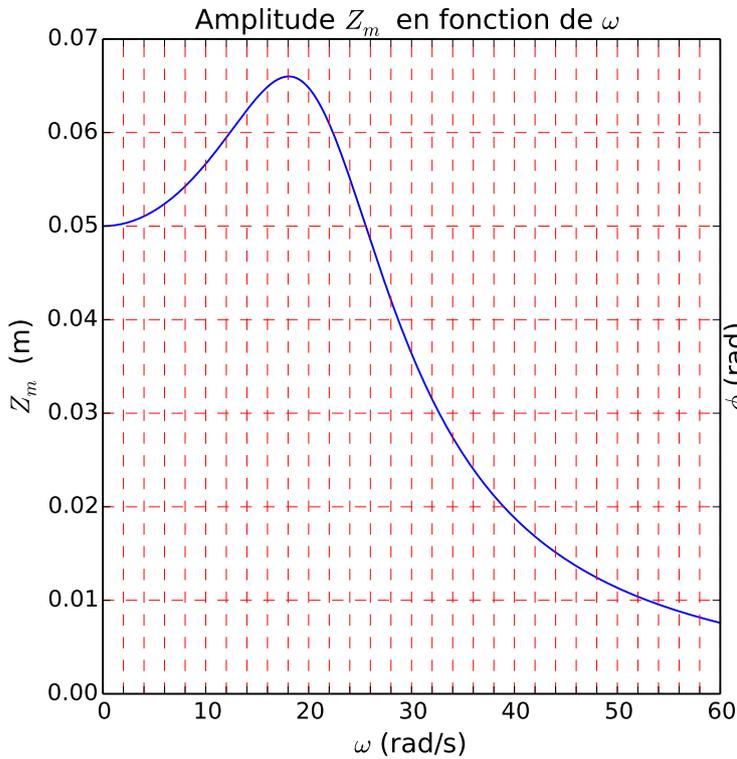
En présence d'une résonance du type de celle en élongation pour un facteur de qualité modéré :

- Lire ω_0 sur la courbe de phase $\varphi(\omega)$: ω_0 est la pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$ (moyenne des valeurs de φ à basse et haute fréquence).
- Deux méthodes sont possibles pour déterminer Q :
 - 1^{ère} méthode :
 - Lire la pulsation ω_r de résonance sur la courbe de $Z_m(\omega)$: ω_r est la pulsation à laquelle Z_m est maximale.
 - En déduire le facteur de qualité Q grâce à la relation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
 - 2^{ème} méthode :
 - Lire l'amplitude $Z_m(\omega_0)$ en ω_0 et l'amplitude $Z_m(0)$ en $\omega = 0$.

Utiliser la relation $Z_m(\omega_0) = Q \times Z_m(0)$ pour en déduire Q .

Exercice de cours C

Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à l'aide des deux graphes ci-dessous.



Solution:

— On lit pour $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$: $\omega_0 = 22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

— On lit $Z_m(0) = 0,05 \text{ m}$

En $\omega_0 = 22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: $Z_m(\omega_0) = 0,06 \text{ m}$

Or $Z_m(\omega_0) = QZ_m(0)$, donc $Q = \frac{0,06}{0,05} = 1,2$

— On peut également lire $\omega_r = 18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, or $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, soit $Q = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)}} = 1,2$

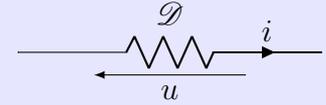
II Étude de circuits linéaires en RSF

Dans le chapitre précédent nous avons établi l'analogie entre le système masse-ressort et le circuit RLC série. Nous pouvons toujours utiliser cette analogie, et avoir l'intuition que nous observerons également des résonances selon les paramètres du circuit. L'étude des circuits électriques en régime sinusoïdal ne nécessite pas d'établir une équation différentielle, puis de la passer en représentation complexe, comme nous venons de le faire pour l'oscillateur mécanique, ce qui peut s'avérer un peu long pour des circuits contenant plusieurs mailles. **L'objectif de cette partie est d'introduire de nouvelles grandeurs qui pourront rendre l'étude des circuits en régime sinusoïdal très facile.**

II.1 Impédances

Définitions : Impédance complexe

On considère un dipôle \mathcal{D} linéaire passif, en convention récepteur, dont la tension à ses bornes s'écrit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.



En régime sinusoïdal forcé et en utilisant la représentation complexe, on définit l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle \mathcal{D} telle que :

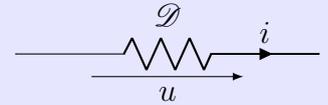
■ En convention récepteur, la relation entre \underline{u} et \underline{i} s'écrit

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$$

■ L'impédance est le module de l'impédance complexe : $Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$ et s'exprime en Ohm (Ω).

■ L'argument de l'impédance complexe est le déphasage de la tension aux bornes du dipôle par rapport à l'intensité du courant qui le traverse : $\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

■ En convention générateur, la relation s'écrit : $\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i}$



Définition : Admittance complexe

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

L'admittance $Y = \frac{1}{Z}$ s'exprime en Siemens (S) ou en Ω^{-1}

REMARQUES

Soit un dipôle linéaire passif d'impédance complexe \underline{Z} .

• D'après les définitions ci-dessus, $Z = |\underline{Z}|$ et $\Delta\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z})$.

On écrit alors l'impédance complexe sous la forme $\underline{Z} = Z e^{j\Delta\varphi_{u/i}} = Z \cos(\Delta\varphi_{u/i}) + j Z \sin(\Delta\varphi_{u/i})$

Ainsi $\Re(\underline{Z}) = Z \cos(\Delta\varphi_{u/i})$ et $\Im(\underline{Z}) = Z \sin(\Delta\varphi_{u/i})$

• La relation entre impédance et admittance complexes est $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$, ce qui donne la relation entre les arguments : $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$.

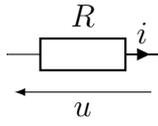
Capacité exigible : Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.

Impédances des dipôles linéaires

Pour chaque dipôle ci-dessous,

- établir les expressions de l'impédance complexe, de l'admittance complexe, ainsi que de l'impédance et de l'admittance ;
- déterminer les comportements des dipôles à basse et haute fréquence.

R1. Cas de la résistance.



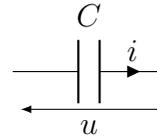
Solution: $u = Ri \Rightarrow \underline{u} = R\underline{i}$, donc $\underline{Z}_R = R$

$\underline{Z}_R = R \in \mathbb{R}^+$, donc $\Delta\varphi_{u/i} = 0$: l'intensité à travers la résistance et la tension à ses bornes sont en phase.

R2. Cas du condensateur.

Solution:

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} \\ \underline{i} &= C \frac{d\underline{u}}{dt} \\ \underline{i} &= C \times (j\omega)\underline{u} \\ \underline{Z}_C &= \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{Cj\omega} \end{aligned}$$

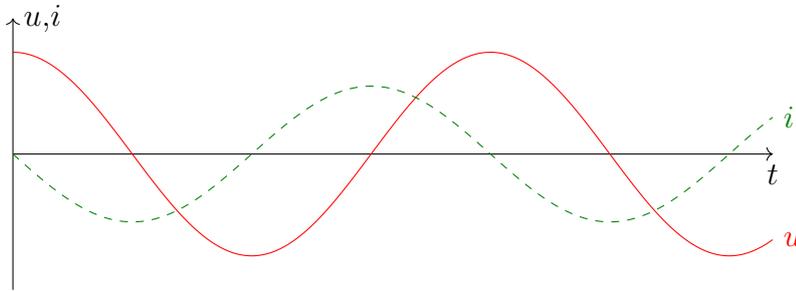


Impédance complexe du condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega}$

Impédance du condensateur : $Z_C = \frac{1}{C\omega}$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega} = \frac{-j}{C\omega} \in j\mathbb{R}^-, \text{ donc } \Delta\varphi_{u/i} = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \arg(\underline{Z}_C) = -\frac{\pi}{2}$$

La tension aux bornes du condensateur est en retard sur l'intensité du courant qui la traverse.



$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_C = +\infty$, donc à basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$)

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_C = 0$, donc à haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil ($u = 0$)

R3. Cas de la bobine.

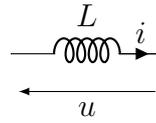
Solution:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$

$$\underline{u} = L \times (j\omega) \underline{i}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = Lj\omega$$

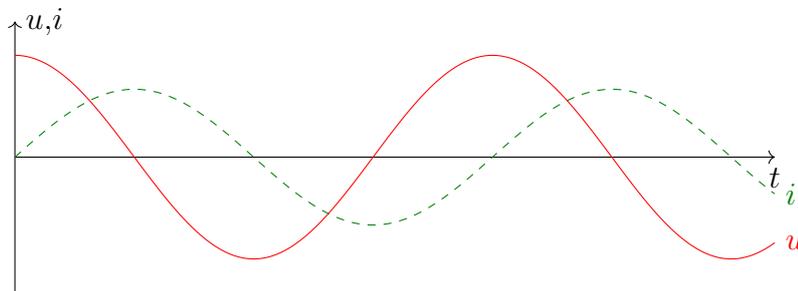


Impédance complexe de la bobine : $\underline{Z}_L = Lj\omega \in j\mathbb{R}^+$

Impédance de la bobine : $Z_L = L\omega$

$$\underline{Z}_L = Lj\omega \in j\mathbb{R}^+, \text{ donc } \Delta\varphi_{u/i} = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \arg(\underline{Z}_L) = +\frac{\pi}{2}$$

La tension aux bornes de la bobine est en avance sur l'intensité du courant qui la traverse.



$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_L = 0$, donc à basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil ($u = 0$)

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_L = \infty$, donc à haute fréquence, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$)

♥ À retenir

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = Lj\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega}$
Impédance	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \frac{1}{C\omega}$
Admittance complexe	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{Lj\omega}$	$\underline{Y}_C = Cj\omega$

$\omega \rightarrow 0$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow 0$	$Z_C \rightarrow \infty$
$\omega \rightarrow \infty$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow \infty$	$Z_C \rightarrow 0$

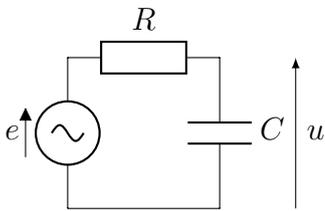
Attention

	interrupteur ouvert	fil
Tension aux bornes d'un ...	QUELCONQUE	NULLE
Intensité à travers d'un ...	NULLE	QUELCONQUE

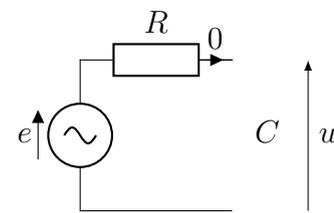
Exercice de cours D Comportement basse et haute fréquences de circuits

Déterminer la tension u dans les circuits ci-dessous à basse et haute fréquences. Tous les circuits sont alimentés par un générateur idéal de tension de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

R1. .

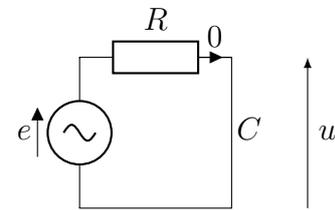


À BF : $Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$: c'est un interrupteur ouvert



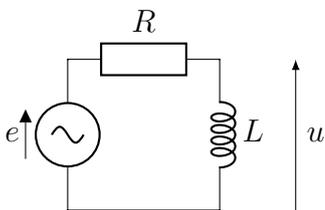
Loi des mailles : $u = e$

À HF : $Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$: c'est un fil

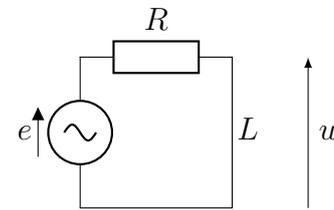


u est la tension aux bornes d'un fil : $u = 0$

R2. .

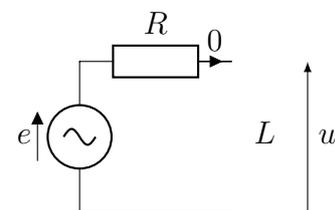


À BF $Z_L = L\omega \rightarrow 0$: la bobine est un fil



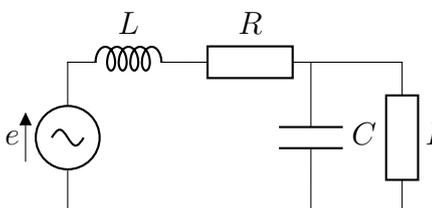
u est la tension aux bornes d'un fil, donc $u = 0$

À HF, $Z_L = L\omega \rightarrow \infty$: la bobine est un interrupteur ouvert

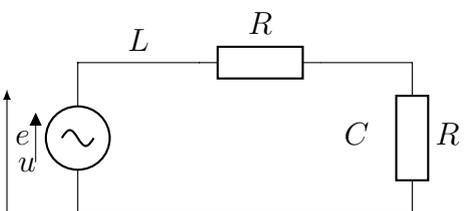


Loi des mailles : $u = e$

R3. .

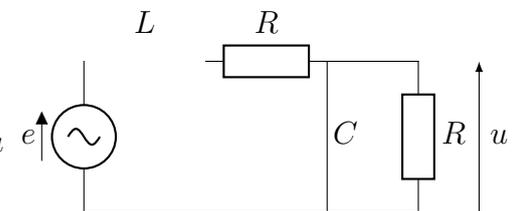


À BF



Pont diviseur de tension : $u = \frac{e}{2}$

À HF



u est la tension aux bornes d'un fil, donc $u = 0$

II.2 Lois des nœuds et des mailles en RSF

♥ À retenir : Lois des nœuds et des mailles en RSF

Les lois des nœuds et loi des mailles (ou lois de Kirchhoff) s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. Dans les circuits linéaires, l'ensemble des signaux sont de même pulsation, et on peut utiliser la représentation complexe.

■ Dans une maille, préalablement orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U}_{m,k} = 0$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens d'orientation de la maille, et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche de u_k est en sens opposé au sens d'orientation de la maille.

■ En un nœud, la somme algébrique des intensités est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{n,k} = 0$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant i_k arrive dans le nœud et $\varepsilon_k = -1$ si le courant i_k part du nœud.

⚠ Attention – Erreur à ne pas commettre

Les lois des mailles et des nœuds DOIVENT être écrites avec les AMPLITUDES COMPLEXES ou les SIGNAUX COMPLEXES, mais ne doivent pas être écrites à l'aide des amplitudes des signaux.

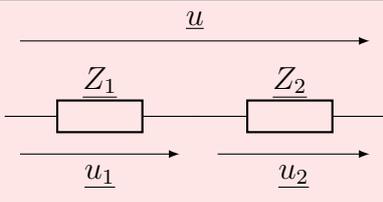
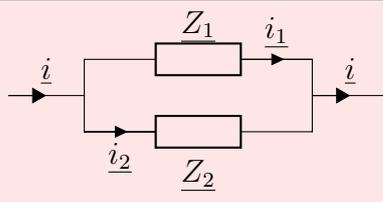
On ne sommera JAMAIS des amplitudes, seulement des amplitudes complexes.

II.3 Associations d'impédances

Capacité exigible : Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

En RSF, en utilisant la représentation complexe, on associe les impédances et on écrit les relations des PDT et PDC comme pour les résistances.

♥ À retenir

	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de $\underline{Z}_{\text{éq}}$	$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$	$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
Pont diviseur	de tension : $\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}$	de courant : $\underline{i}_1 = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} \underline{i}$

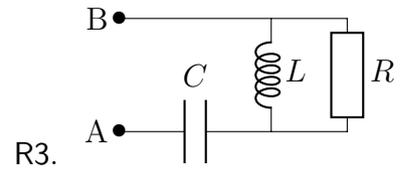
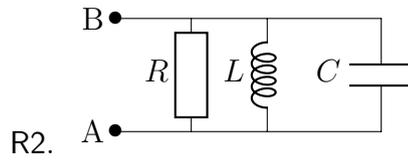
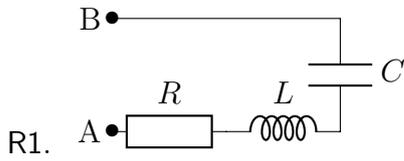
⚠ Attention – Erreurs à ne pas commettre

Avant d'utiliser les formules d'association et de ponts diviseurs, il faut s'assurer que les dipôles sont bien en série ou en parallèle.

Lors de l'utilisation des relations des ponts diviseurs, faire attention aux sens des tensions ou des courants.

Exercice de cours E Impédances équivalentes

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe \underline{Z}_{AB} équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.



Solution:

R1. Les trois dipôles sont en série, donc le dipôle équivalent est d'impédance complexe :

$$\underline{Z}_{AB} = R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} = R \left(1 + \frac{L}{R}j\omega + \frac{1}{RCj\omega} \right)$$

R2. Les trois dipôles sont en parallèle, le dipôle équivalent est d'admittance complexe :

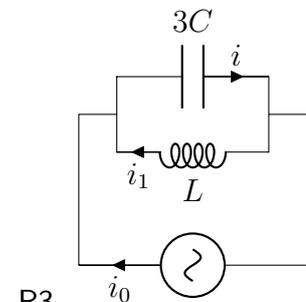
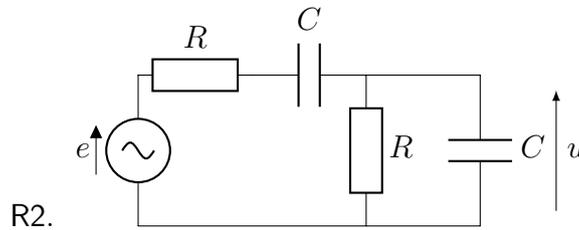
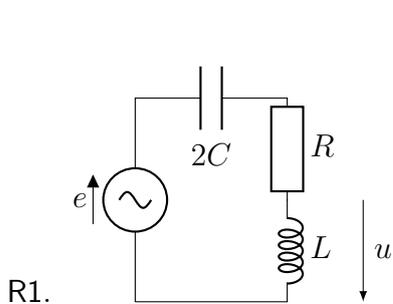
$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R} + Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega} = \frac{1}{R} \left(1 + RCj\omega + \frac{R}{Lj\omega} \right) \text{ Soit } \underline{Z}_{AB} = \frac{R}{1 + RCj\omega + \frac{R}{Lj\omega}}$$

R3. On commence par associer les dipôles qui sont en parallèle, d'admittance équivalente $\underline{Y}_1 = Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega}$

Puis on associe cette association en série avec R : $\underline{Z}_{AB} = R + \frac{1}{Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega}}$, soit $\underline{Z}_{AB} = R \left(1 + \frac{1}{RCj\omega + \frac{R}{Lj\omega}} \right)$

Exercice de cours F Ponts diviseurs

Établir les expressions, en utilisant la représentation complexe, de \underline{u} en fonction de \underline{e} ou de \underline{i} et \underline{i}_1 en fonction de \underline{i}_0 pour les circuits ci-dessous.



Solution:

$$\underline{u} = \frac{Lj\omega}{Lj\omega + R + \frac{1}{2Cj\omega}} (-\underline{e})$$

Solution:

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{Cj\omega} \text{ et } \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + Cj\omega$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2} \underline{e}$$

soit $\underline{u} = \frac{1}{3 + RCj\omega + \frac{1}{RCj\omega}} \underline{e}$

Solution:

$$\underline{i} = \frac{3Cj\omega}{3Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega}} \underline{i}_0$$

$$\underline{i}_1 = -\frac{1/(Lj\omega)}{3Cj\omega + 1/(Lj\omega)} \underline{i}_0$$

II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF

Méthode : Comment étudier un circuit linéaire en RSF ?

Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, la représentation complexe peut (et doit !) être utilisée.

1. Écrire l'impédance de chaque dipôle linéaire passif présent dans le circuit.
2. Introduire sur le schéma du circuit, toutes les tensions et intensités nécessaires : positionner les flèches et les nommer.

3. Associer les impédances entre elles dès que possible (en série ou en parallèle), *qui ne font pas disparaître les grandeurs électriques recherchées.*
4. Écrire les lois des mailles et/ou lois des nœuds nécessaires **en représentation complexe.**
5. Ne pas oublier les PONTS DIVISEURS de tension et de courant **en représentation complexe**, bien utiles, qui remplacent des lois des mailles/des nœuds.

III Résonances dans un circuit RLC série

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.php

Expérience : Cf TP Résonances du circuit RLC série

Relire/reprenre le compte rendu de ce TP.

III.1 Résonance en tension aux bornes de C

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.

Étude de la résonance en tension du RLC série

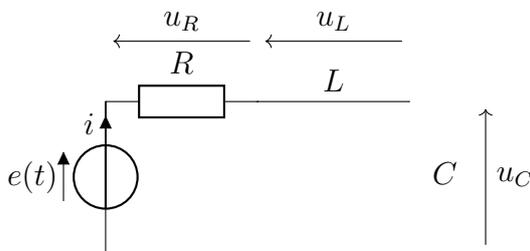
On souhaite déterminer les caractéristiques en RSF de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$ dans le circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Comportement asymptotique

R1. Déterminer le comportement asymptotique de U_{Cm} , sans calculs.

Solution:

À basse fréquence : $Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ et $Z_L = L\omega \rightarrow 0$



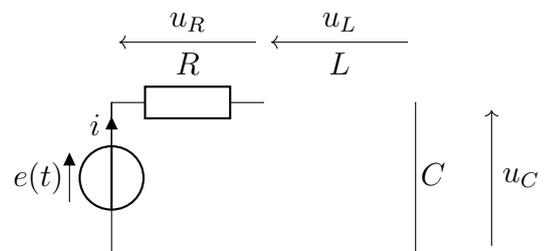
$i = 0$, donc $u_R = 0$.

$u_L = 0$

Loi des mailles : $u_C(t) = e(t)$, donc $U_{Cm} = E_m$

et $\varphi_u = 0$.

À haute fréquence : $Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ et $Z_L = L\omega \rightarrow \infty$



$i = 0$, donc $u_R = 0$.

$u_C = 0$, donc $U_{Cm} = 0$

Loi des mailles : $u_L(t) = e(t)$.

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

R2. Établir l'expression de U_{Cm} en fonction de E_m , ω , L , C , R .

Mettre U_{Cm} sous la forme : $U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$, et identifier les expressions de ω_0 et Q .

Commenter.

Solution: Les dipôles sont en série on peut donc utiliser la relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{u}_C &= \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} e \\ &= \frac{1}{\frac{1}{Cj\omega} + R + Lj\omega} e \\ &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + RCj\omega} e \\ \underline{U}_{Cm} e^{j\omega t} &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + RCj\omega} E_m e^{j\omega t} \\ \underline{U}_{Cm} &= \frac{E_m}{1 - LC\omega^2 + RCj\omega} \\ \underline{U}_{Cm}(\omega) &= \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned}$$

Par identification : $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$, donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

et $\frac{1}{Q\omega_0} = RC$, donc $Q = \frac{1}{RC} \sqrt{LC}$, donc $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

On reconnaît exactement la même forme que celle obtenue pour le système masse-ressort :

$$\underline{Z}_m = \frac{\omega_0^2 Z_{Am}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} = \frac{Z_{Am}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

L'étude effectuée pour \underline{Z}_m est également valable pour \underline{U}_{Cm} .

	Résonance en élongation	Circuit RLC série aux bornes de C
Excitation	$z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = kz_A(t)$	$L\frac{d^2u_c}{dt^2} + R\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C}u_c = \frac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$	$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{Z_{Am}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{U}_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Paramètres de l'oscillateur	α	R
	m	L
	k	$\frac{1}{C}$
Graphes de l'amplitude		
Graphes de la phase		

III.2 Résonance en intensité

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

Définition : Bande passante et pulsation de coupure

- Les pulsations de coupure sont les pulsations ω_c telles que

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

- La **bande passante**, est l'intervalle de pulsation $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ telle que pour toute pulsation $\omega \in [\omega_{c1}, \omega_{c2}]$

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $I_{m,\max}$ la valeur maximale prise par l'amplitude de l'intensité (=valeur de l'amplitude de l'intensité à la résonance).

Définition : Acuité de la résonance

On définit l'acuité de la résonance, la grandeur sans dimension, notée A_c par :

$$A_c = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

où ω_r est la pulsation de résonance et $\Delta\omega$ est la largeur de la bande passante.

Elle est d'autant plus élevée que la largeur de la bande passant est faible devant la pulsation de résonance.

Graphiquement, l'acuité est d'autant plus élevée que le « pic de résonance est étroit ».

Étude de la résonance en intensité dans le RLC série

On étudie l'intensité, une fois le régime transitoire terminé, dans le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On écrit l'intensité sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, avec I_m l'amplitude de $i(t)$ et φ_i le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

Comportement asymptotique

R1. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de I_m à basse et haute fréquences.

Solution: À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, il ouvre le circuit, donc $I_m = 0$

À haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, elle ouvre le circuit, donc $I_m = 0$

Amplitude complexe de l'intensité

R2. Déterminer, en représentation complexe, l'amplitude complexe \underline{I}_m de l'intensité du courant.

La mettre sous la forme : $\underline{I}_m(\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ et identifier les trois constantes A , ω_0 et Q .

Solution: On peut donc étudier le circuit grâce aux impédances en utilisant la représentation complexe. Les trois composants sont en série et peuvent donc être associés :

$$Z_{\text{éq}} = Z_R + Z_L + Z_C = R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}.$$

On obtient alors le circuit ci-contre.

On peut écrire : $\underline{e}(t) = Z_{\text{éq}}\underline{i}(t)$

$$\text{Alors } \underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{Z_{\text{éq}}} = \frac{e}{R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}}$$

Or $e(t) = E_m \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

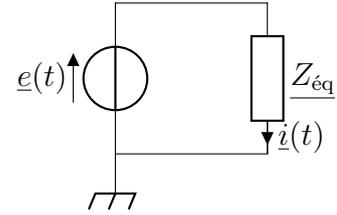
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$, avec $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$.

$$\text{Ainsi } \underline{I}_m = \frac{E_m}{R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + \frac{j}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}, \text{ que l'on peut mettre sous la forme fournie}$$

$$\underline{I}_m = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\text{Avec } A = \frac{E_m}{R} \text{ et } \begin{cases} \frac{Q\omega}{\omega_0} = \frac{L\omega}{R} & (1) \\ \frac{\omega_0 Q}{\omega} = \frac{1}{RC\omega} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \times (2) & Q^2 = \frac{L}{R^2 C} \\ (2) & \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}$$

$$\text{D'où, pour le circuit RLC série, on a alors : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



R3. Déterminer les équivalents de l'amplitude \underline{I}_m pour $\omega \ll \omega_0$ et pour $\omega \gg \omega_0$. On ne gardera que LE terme dominant au dénominateur.

Solution: Pour $\omega \ll \omega_0$: $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1$, donc le terme dominant est $-jQ \frac{\omega_0}{\omega}$

$$\text{Ainsi } \underline{I}_m \approx \frac{E/R}{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}} = j \frac{E\omega}{RQ\omega_0} \in j\mathbb{R}^+$$

Pour $\omega \gg \omega_0$: $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$, donc le terme dominant est $jQ \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\text{Ainsi } \underline{I}_m \approx \frac{E/R}{jQ \frac{\omega}{\omega_0}} = -j \frac{E\omega_0}{RQ\omega} \in j\mathbb{R}^-$$

R4. En déduire les valeurs limites de l'amplitude I_m de l'intensité, et du déphasage entre i et e à basse et haute fréquence.

$$\text{Solution: } \lim_{\omega \rightarrow 0} I_m(\omega) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} I_m(\omega) = 0$$

Étude de l'amplitude I_m

R5. Déterminer l'expression de $I_m(\omega)$.

$$\text{Solution: L'amplitude est le module de l'amplitude complexe : } I_m = |\underline{I}_m| = \frac{\frac{E_m}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

R6. Étudier l'existence d'une résonance.

Solution: $I_m = |I_m| = \frac{\frac{E_m}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ est maximal lorsque le dénominateur est minimal (le

numérateur ne dépendant pas de la pulsation ω), donc quand $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimal, ce qui se produit lorsque $\omega = \omega_0$.

Il se produit donc une résonance, c'est-à-dire l'amplitude de l'intensité est maximale, quelque soit le facteur de qualité Q , lorsque la pulsation du générateur est égale à la pulsation propre du circuit.

À la résonance, l'amplitude vaut $I_m(\omega_0) = \frac{E_m}{R}$

R7. Tracer l'allure de $I_m(\omega)$.

Solution: cf ci-dessous

R8. Déterminer les expressions des pulsations de coupure en fonction de ω_0 et Q .

Solution: Cherchons les deux pulsations de coupure ω_c telle que

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{E_m}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\text{En multipliant par } \omega_c \times \omega_0 : \omega_c^2 - \omega_0^2 = \pm \frac{\omega_0}{Q} \omega_c \Leftrightarrow \omega_c^2 \mp \frac{\omega_0}{Q} \omega_c - \omega_0^2 = 0$$

On obtient deux équations du 2^{ème} degré de même discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$

« - »

$$\text{Racines : } \omega_c = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}}_{> \frac{1}{2Q}}$$

ω_c est nécessairement positive, donc

$$\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

« + »

$$\text{Racines : } \omega_c = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}$$

$$\omega_c = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}}_{> \frac{1}{2Q}}$$

ω_c est nécessairement positive, donc

$$\omega_{c1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} < \omega_{c2}$$

R9. En déduire que la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ est reliée à Q par : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Que dire de la dépendance de l'acuité de la résonance avec le facteur de qualité ?

Solution: Ainsi, la bande passante $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ est de largeur

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} - \left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right), \text{ d'où } \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

La résonance est d'autant plus aiguë (bande passante étroite) que le facteur de qualité est élevé.

Étude du déphasage φ_i entre i et e

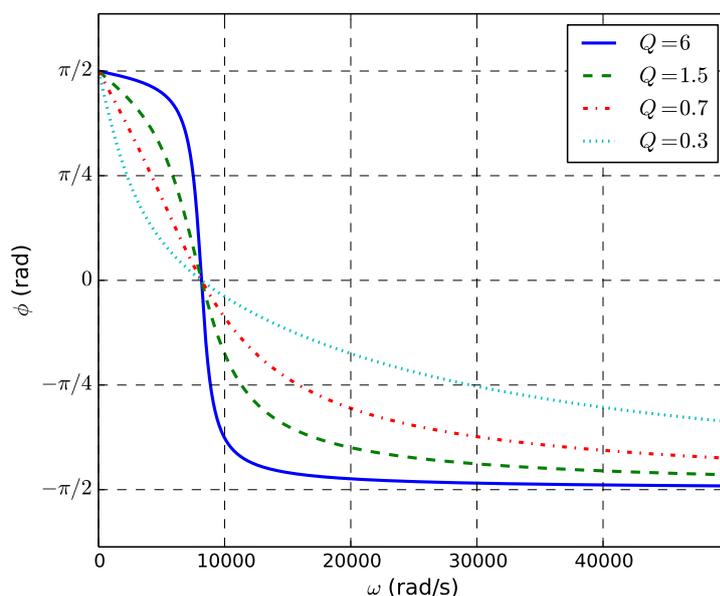
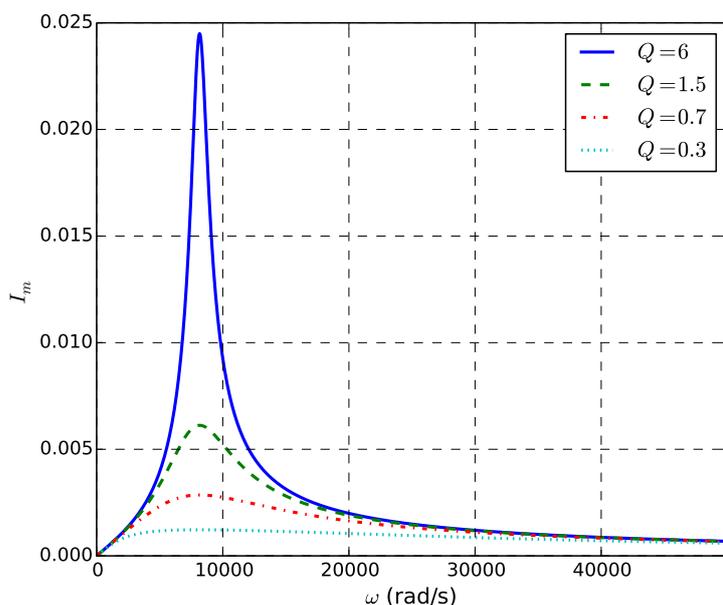
R10. Que vaut le déphasage à la résonance ? Comment sont $e(t)$ et $i(t)$ à la résonance ?

Solution: À la pulsation ω_0 de résonance en intensité : $\varphi_i(\omega_0) = -\arctan(0) = 0$.
L'intensité $i(t)$ est en phase avec $e(t)$ à la résonance en intensité.

R11. Tracer l'allure de $\varphi_i(\omega)$.

Solution: Cf ci-dessous

Ci-dessous, les courbes de $I_m(\omega)$ et $\varphi_i(\omega)$ pour différentes valeurs de R , à L et C fixées.



Capacité exigible : Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

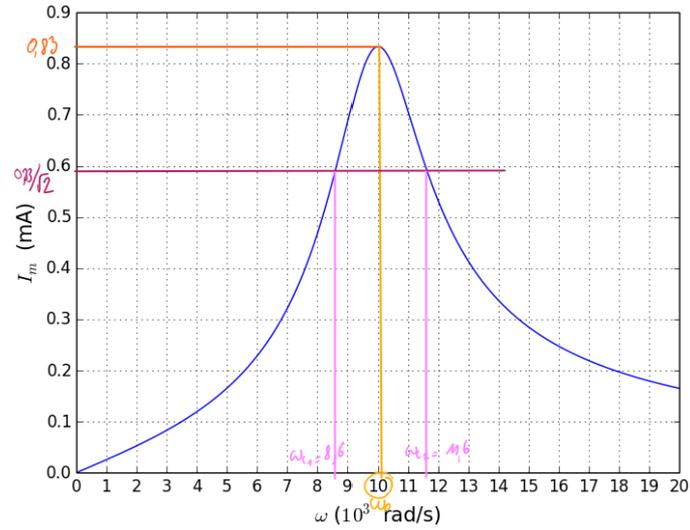
💡 Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q

Quand sont fournies les courbes d'amplitude A_m et de phase φ en présence d'une résonance du type de la résonance en intensité d'un RLC série :

- Lire ω_0 sur la courbe d'amplitude : ω_0 est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale (ou sur la courbe de phase : $\varphi_i(\omega_0) = 0$).
- Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:
 - Lire la valeur maximale de l'amplitude $A_{m,\max} = A_m(\omega_0)$;
 - Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\frac{A_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
 - En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.
- En déduire le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Exercice de cours G

Déterminer ω_0 et Q sur le graphique ci-dessous.



Solution: La pulsation de résonance en intensité est la pulsation propre : $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Les pulsations de coupure sont les pulsations pour lesquelles l'amplitude de l'intensité est égale à l'amplitude maximale (à la résonance) divisée par $\sqrt{2}$: $\omega_{c1} = 8,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_{c2} = 11,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Ainsi le facteur de qualité vaut : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 3,3$