? À rendre le mercredi 29 novembre 2023

Devoir Maison n°7

Comment chercher un D.M. ?

- Commencer à chercher le DM, **dès le soir de la distribution de l'énoncé**,
- **Avec le chapitre et les exercices ouverts** sous les yeux.
- En cas de blocage, **poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail : `nvalade.pcsi@gmail.com`
- La réponse à un problème de physique doit contenir :
  - des **schémas** grands, clairs et complets ;
  - des **phrases** qui expliquent votre raisonnement ;
  - les calculs **littéraux**, avec uniquement les **grandeurs littérales** définies par l'énoncé (ou par vous-même si elles ne le sont pas par l'énoncé) ;
  - les applications numériques avec un nombre adapté de chiffres significatifs et une **unité**.

Après avoir récupéré votre copie et le corrigé :

- Reprendre votre copie avec le corrigé afin de comprendre vos erreurs, lire les conseils donnés, ...
- Refaire le DM (si besoin) avant le DS suivant.

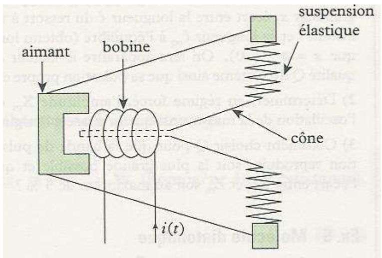
Travail à effectuer :

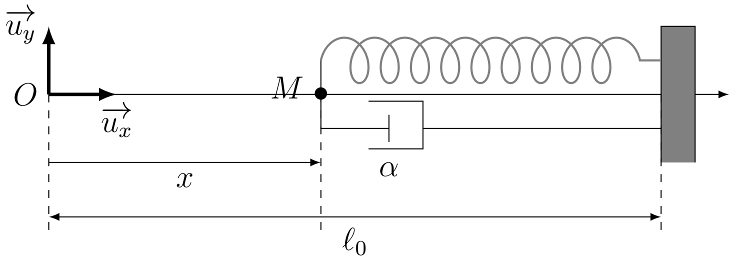
— Exercice 1 : Pour les moins à l'aise ;

— Exercice 2 : Pour les plus à l'aise

Exercice n°1 Haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe $(O, \overrightarrow{u_x})$.





Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et à un amortisseur fluide de constante α : $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$.
Elle est par ailleurs soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur. On a la relation $\overrightarrow{F}(t) = Ki(t)\overrightarrow{u_x}$, où K est une constante. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.
On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
Données : $m = 10$ g ; $k = 15.10^3$ N · m^{-1} ; $K = 200$ N · A^{-1} ; $I_m = 1,0$ A.

Q1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par x, la position de la masse m. ***Soyez très rigoureux pour établir l'expression de la force de rappel élastique !***

Q2. L'écrire sous forme canonique suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A_m \cos(\omega t)$$

identifier les expressions de A_m, ω_0 et Q.

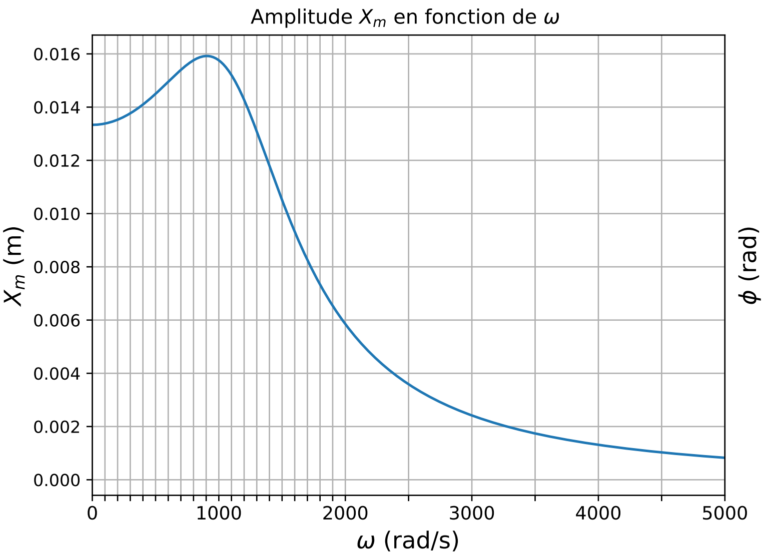
Q3. Justifier que la réponse en régime forcée s'écrit sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

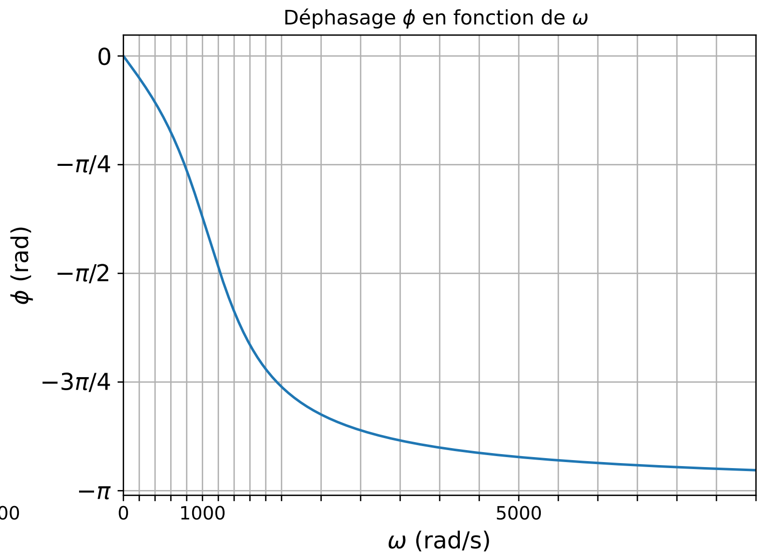
Q4. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ associée à la solution complexe $\underline{x}$.

Q5. En déduire l'expression de l'amplitude X_m.

Q6. Établir qu'il se produit une résonance pour une pulsation ω_r que l'on établira en fonction de ω_0 et Q, et établir la condition que doit vérifier Q pour que cette résonance existe.

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.





Q7. Exprimer $\underline{X_m}$ à la pulsation ω_0, et en déduire l'amplitude et la phase à cette pulsation.

Q8. Déterminer graphiquement la pulsation propre et le facteur de qualité. *La réponse devra être proprement justifiée.*

Q9. En déduire la valeur du coefficient d'amortissement α.

Exercice n°2 Étude du capteur d'accélération d'un smartphone

On se propose dans un premier temps d'étudier le principe de fonctionnement des accéléromètres présents dans nos téléphones. Les avancés des nanotechnologies ont permis l'élaboration de ces accéléromètres à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems), ces derniers sont fixés sur les cartes électroniques de nos smartphones. Dans toute la suite :

— On note $\mathscr{R}_T$ le référentiel terrestre supposé galiléen, de centre O et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ fixe dans ce référentiel. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre, on prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

— On note $\mathscr{R}$ le référentiel lié au téléphone. Dans un premier temps, $\mathscr{R}$ est astreint à un mouvement de translation selon la direction Ox.

On donne ci-dessous une schématisation simplifiée de l'accéléromètre étudié :

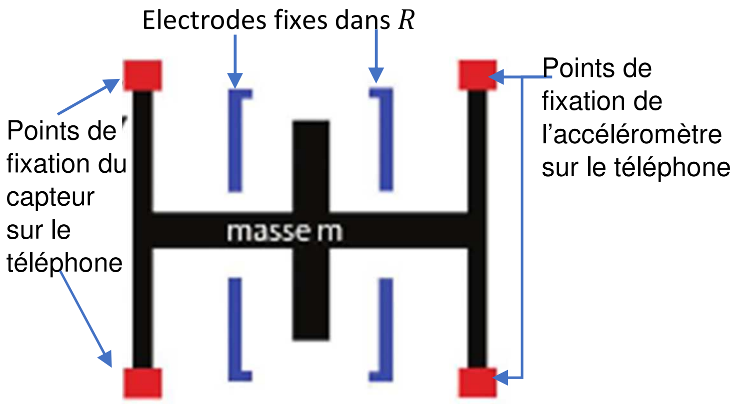


Figure 1 : Smartphone immobile dans R_T

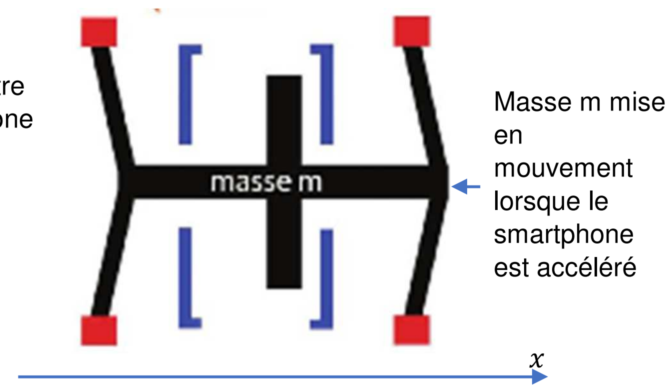
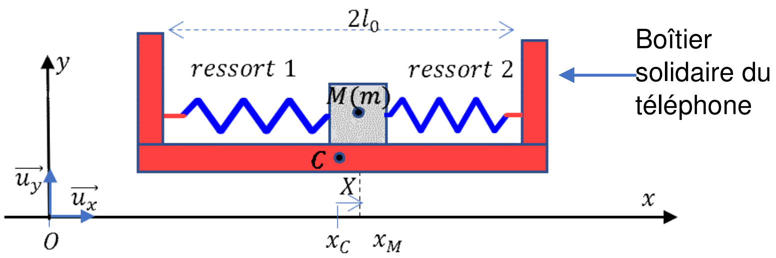


Figure 2 : Smartphone accéléré dans R_T

Source : « Smartphonique » d'Ulysse Delabre (Dunod)

Pour cette étude mécanique, nous ne prendrons pas en compte les électrodes du capteur, fixes dans $\mathscr{R}$. Lorsque le téléphone est accéléré horizontalement selon Ox (figure 2), le bloc de masse m du capteur est mis en mouvement. Il s'en suit des oscillations de la masse m qui peuvent être décrites de manière analogue à un système mécanique de type {masse-ressorts}. Dans la suite, nous allons donc modéliser l'accéléromètre en l'assimilant à une masse m repérée par le point M et reliée à deux ressorts. Ces deux ressorts sont fixés à un boîtier de centre C qui est lui-même solidaire du téléphone :



Ce modèle suppose que les deux ressorts sont identiques, de raideur k, de longueur à vide ℓ_0. On note $\overrightarrow{f_1}$ la force qu'exerce le ressort 1 sur M et $\overrightarrow{f_2}$ la force qu'exerce le ressort 2 sur M. Le boîtier est de longueur $2\ell_0$. Le point C, repéré par l'abscisse $x_c(t)$ est animé d'un mouvement rectiligne et accéléré par rapport à $\mathscr{R}_T$ et son accélération sera notée $\overrightarrow{a_c} = a_c\overrightarrow{u_x}$. La masse m, dont la position est repérée par le point M d'abscisse $x_M(t)$ à l'instant t, est astreinte à un mouvement horizontal. Dans la suite, on pose $X = x_M - x_C$, ainsi $X = 0$ si l'accéléromètre est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre.

Q1. Établir les expressions des forces $\overrightarrow{f_1}$, puis $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de k et X. En déduire $\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$.

On modélise l'action des frottements fluides sur M dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$ par la force

$$\overrightarrow{f_3} = -\alpha(\dot{x}_M - \dot{x}_C)\overrightarrow{u_x}$$

où α est une constante positive.

Q2. Montrer que la position $X(t)$ du point M dans le référentiel terrestre vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_C$$

Où ω_0 et Q sont deux constantes dont on précisera les expressions en fonction des données du sujet.

Q3. Donner les unités de ω_0 et Q ainsi que la signification physique de ces deux grandeurs.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer les conditions pour lesquelles le déplacement est proportionnel à l'accélération que l'on cherche à mesurer.

Pour cela, on va étudier la réponse du capteur en régime sinusoïdal forcé tel que $a_C = a_m \cos(\omega t)$ où ω est la pulsation à laquelle oscille le téléphone et $a_m > 0$ est une constante.

Dans ces conditions, on écrit $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où $X_m > 0$ sont des constantes pour une valeur de ω donnée.

En utilisant la représentation complexe, on écrit $\underline{X} = X_m^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{a_c} = a_m e^{j\omega t}$.

Q4. En utilisant $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, montrer que : $X_m = \dfrac{a_m}{\omega_0^2\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + \left(\dfrac{u}{Q}\right)^2}}$

Dans la suite, on prendra $Q = 5$ et $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 5,0$ kHz.

Q5. Montrer qu'il est possible d'observer un phénomène de résonance en élongation à la fréquence $f_r = f_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

Q6. Proposer une estimation de la valeur de f_r.

Q7. Expérimentalement, on stimule le capteur à des fréquences $f \ll f_r$, montrer alors que $X_m \approx K a_m$ où K est une constante qu'on exprimera en fonction des données du sujet.

Q8. Pour cette question, on impose une accélération a_c constante telle que $a_c = g$. Estimer alors la valeur finale de X en nm.