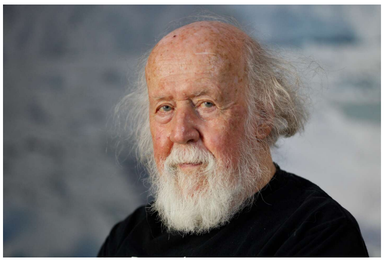
Lundi 20 novembre 2023
Devoir Surveillé n°4 (1) — *Corrigé*

Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS ! ! ! !
- Commencer les réponses par une PHRASE.
- AUCUNE phrase ne peut commencer par donc, parce que, oui, non, du coup...
- Interdisez-vous d'utiliser « on .... » et « on a ».
- ENCADRER la grandeur et son expression LITTÉRALE FINALE.
- ⚠ DISTINGUER la pseudo-période et la période propre ; la pseudo-pulsation et la pulsation propre.

Exercice n°0 Qui est-ce ?



Solution: C'est Hubert Reeves, astrophysicien français, vulgarisateur hors pair. Il est décédé le 13 octobre 2023.

Exercice n°1 Questions de cours : Régime sinusoïdal forcé *(MAX 30 min)*

Pour les questions suivantes, en QCM, indiquez la ou les lettres des bonnes réponses sur votre copie.

R1. (bonus) Quels sont les mots correctement orthographiés ?

A. résonner B. résoner C. raisoner D. résonnance **E. résonance** F. raisonance

R2. Un signal physique est donné par $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$. Le signal complexe associé est :

A. $\underline{x} = X_0$ **B.** $\underline{x} = X_0 e^{j\omega t}$ C. $\underline{x} = X_0 e^{j\omega t + \frac{\pi}{2}}$ D. $\underline{x} = X_0 \cos(j\omega t)$

R3. Un signal physique est donné $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. Le signal complexe associé est :

A. $\underline{x} = X_m e^{j\varphi}$ B. $\underline{x} = X_m e^{j\omega t + \varphi}$ **C.** $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ D. $\underline{x} = X_m \cos(j(\omega t + \varphi))$

R4. L'amplitude complexe $\underline{X_m}$ associée au signal complexe $\underline{x}$ précédent est telle que :

A. $\underline{x} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$ B. $\underline{X_m} = X_m e^{\varphi}$ C. $\underline{x} = \underline{X_m} e^{j\varphi}$ **D.** $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$

R5. Soit un signal $x(t)$ de signal complexe associé $\underline{x}$. Quel est le signal complexe associé à $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$?

A. $j\omega\underline{x}$ B. $\dfrac{\underline{x}}{j\omega}$ C. $j\omega t\underline{x}$ D. $\dfrac{\underline{x}}{j\omega t}$

R6. Soit le nombre complexe $2 + 3i$, et sa phase φ.

A. $\tan(\varphi) = \dfrac{2}{3}$ B. $\tan(\varphi) = \dfrac{3}{2}$ C. $\varphi = \arctan(2/3)$ **D.** $\varphi = \arctan(3/2)$

R7. Le module de $1 + j\omega\tau$ est
A. $1+\omega^2\tau^2$ B. $1-\omega^2\tau^2$ **C.** $\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ D. $\sqrt{1-\omega^2\tau^2}$

Un oscillateur amorti excité de manière sinusoïdale obéit à l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0(t)$$

avec $x_0(t) = X_0\cos(\omega t)$.

R8. Pourquoi, en régime établi sinusoïdal forcé, cherche-t-on $x(t)$ sous la forme $x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$?

Solution: La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène $x_H(t)$ et de la solution particulière. Au bout de quelques τ (durée caractéristique du régime transitoire), la solution homogène vaut zéro, et la solution de l'équation différentielle vaut la solution particulière. Cette dernière est recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire d'une fonction sinusoïdale de même pulsation ω que le second membre. L'amplitude et la phase à l'origine des temps sont différentes.

R9. Établir l'expression de $\underline{x}$ en fonction de X_0, t, ω, ω_0 et Q.

Solution: En complexe :

$$\begin{aligned}
\underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{x}} + \omega_0^2\underline{x} &= \omega_0^2\underline{x_0} \\
-\omega^2\underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{x} + \omega_0^2\underline{x} &= \omega_0^2\underline{x_0} \\
\underline{x} &= \frac{\omega^2\underline{x_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}} \\
\underline{x} &= \frac{\omega^2 X_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\underline{x} = \dfrac{\omega^2 X_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}}$

R10. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ de $\underline{x}$.

Solution: avec $\underline{x} = \underline{X_m}e^{j\omega t}$, on en déduit $\boxed{\underline{X_m} = \dfrac{\omega^2 X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}}$

R11. En déduire l'expression de l'amplitude X_m de $x(t)$.

Solution: L'amplitude X_m est le module de $\underline{X_m}$: $\boxed{X_m = \dfrac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}}$

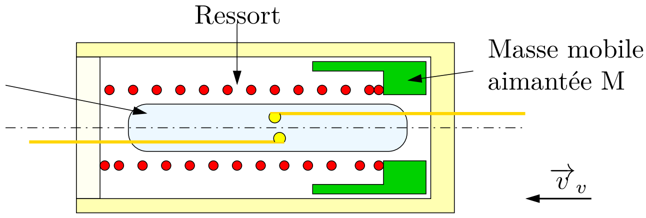
R12. Comment obtenir φ à partir de $\underline{X_m}$? *Le calcul n'est pas demandé.*

Solution: $\boxed{\varphi = \arg(\underline{X_m})}$

Exercice n°2 Détection d'accélération d'un airbag

L'airbag est un dispositif permettant de déployer un coussin gonflant lors d'un choc afin de protéger les passagers d'un véhicule. Le déclenchement du système se fait à l'aide d'un détecteur de décélération basé sur le mouvement d'une masse mobile aimantée (source de freinage et déclencheur du contacteur) attachée à un ressort, venant déclencher un contact électrique lorsque la décélération devient forte.

Ampoule de verre sous vide contenant deux lames métalliques qui se collent lorsqu'elles sont soumises au champ magnétique de la masse mobile M.



Le système est modélisé par une masse m retenue par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et freinée par une force $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. On s'intéresse ici au mouvement de la masse lors d'une décélération a_0 (en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$). On peut montrer que l'équation d'évolution de la position de la masse s'écrit comme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \zeta = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ et $x_e = \ell_0 - \dfrac{ma_0}{k}$

R13. Préciser la signification physique de x_e.

Solution: x_e est la position d'équilibre de la masse mobile, une fois le régime transitoire terminé c'est la position que va occuper la masse mobile.

On se place dans notre étude dans le cas où le coefficient d'amortissement est très faible $\zeta < 1$.

R14. Après avoir écrit le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène, déterminer le signe du discriminant dans le cas de $\zeta < 1$. Quelle est alors la nature du régime transitoire ?
Écrire les racines du polynôme caractéristique dans ce cadre-là.

Solution:
Équation homogène : $\ddot{x}_H + 2\zeta\omega_0\dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0$
Polynôme caractéristique : $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$
Discriminant : $\Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)$
$\boxed{\zeta < 1, \text{ donc } \Delta < 0}$
Racines : $r = -\omega_0\zeta \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

R15. Montrer alors que la solution générale peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + x_e$$

A et B étant deux constantes que l'on déterminera à la question suivante.
Exprimer τ et Ω en fonction de ω_0 et ζ.

Solution:
1. Solution homogène : $x_H(t) = e^{-\omega_0\zeta t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})\Big)$
2. Solution particulière : $x_p = x_e$

3. Solution générale $\boxed{x(t) = e^{-\omega_0\zeta t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t)\right) + x_e}$

On identifie avec la forme fournie : $\boxed{\tau = \dfrac{1}{\omega_0\zeta}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

On considère les conditions initiales suivantes : $x(0) = \ell_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(0) = 0$

R16. Exprimer A et B en fonction des données du problème (a_0, m, k, Ω et τ).

Solution: $x(0) = \ell_0 = A + x_e$, donc $A = \ell_0 - \ell_0 + \dfrac{ma_0}{k} = \dfrac{ma_0}{k}$

$\dot{x}(0) = -\dfrac{A}{\tau} + B\Omega = 0$, soit $B = \dfrac{A}{\Omega\tau} = \dfrac{ma_0}{k\Omega\tau}$

Soit $\boxed{x(t) = \dfrac{ma_0}{k}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \dfrac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right) + x_e}$

R17. Montrer que la vitesse de la masse peut se mettre sous la forme

$$v(t) = -A\left(\frac{1+\tau^2\Omega^2}{\tau^2\Omega}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin(\Omega t)$$

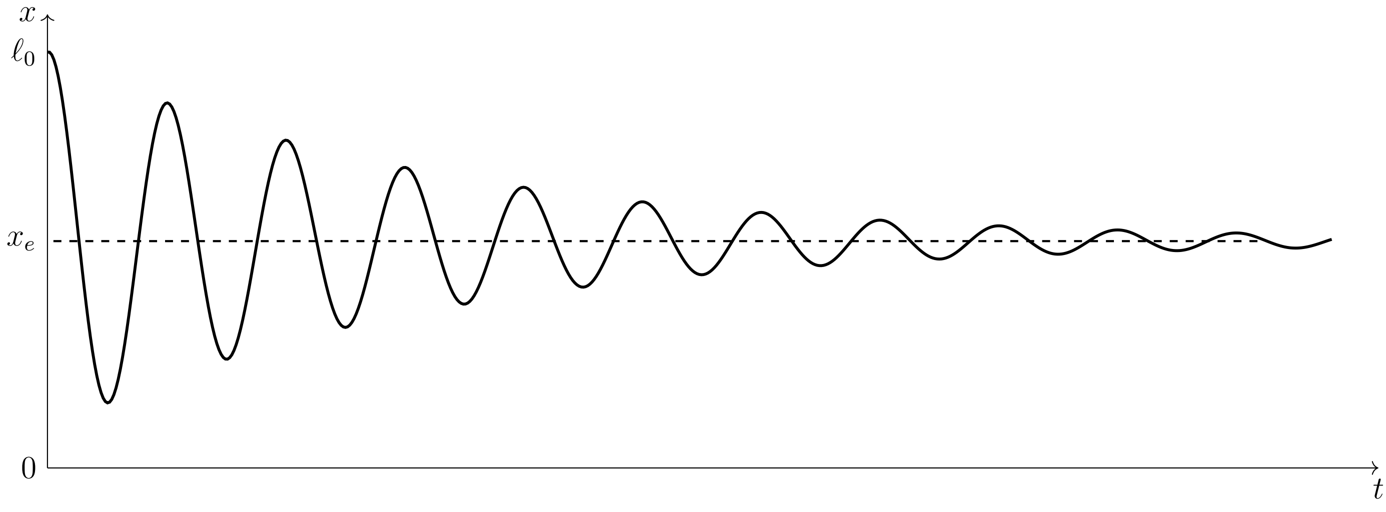
Solution: Vitesse :

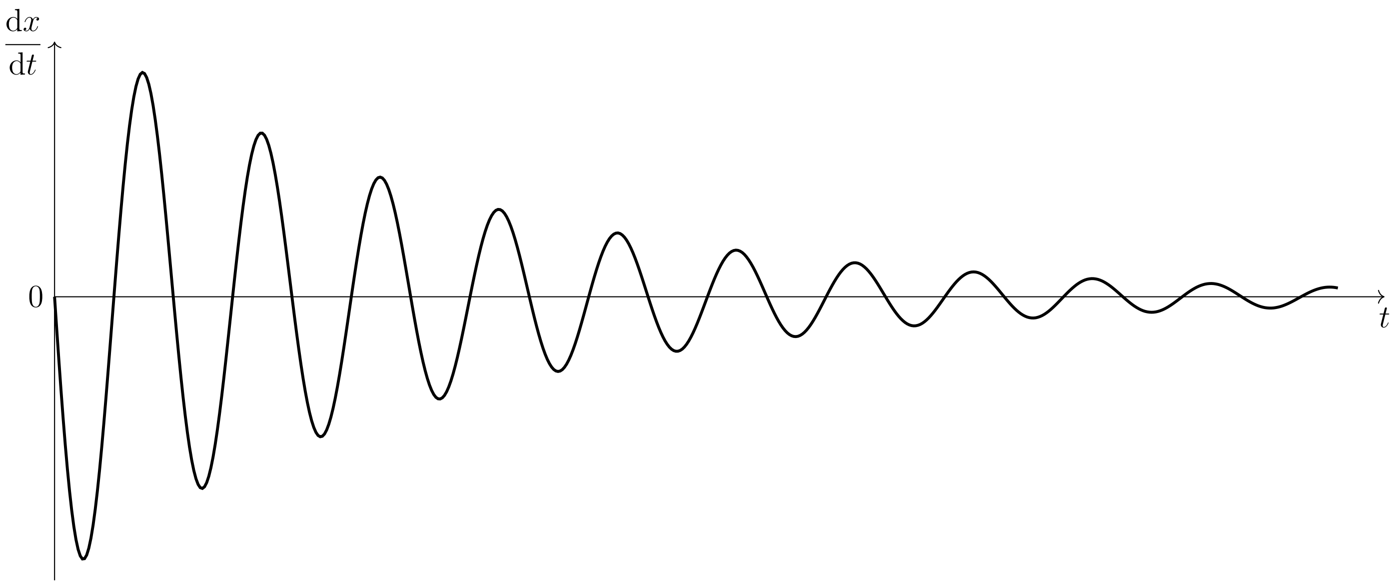
$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{ma_0}{k}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right) - \Omega\sin(\Omega t) + \frac{1}{\tau}\cos(\Omega t)\right) \\
&= \frac{ma_0}{k}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{\Omega\tau} - \Omega\right)\sin(\Omega t) \\
&= \frac{ma_0}{k} \times \frac{-\Omega^2\tau^2 - 1}{\Omega\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)
\end{aligned}$$

Soit, avec $A = \dfrac{ma_0}{k}$, $\boxed{v(t) = -A\left(\dfrac{1+\tau^2\Omega^2}{\tau^2\Omega}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)}$

R18. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $x(t)$ et de $v(t)$ sur une dizaine de périodes.

Solution:





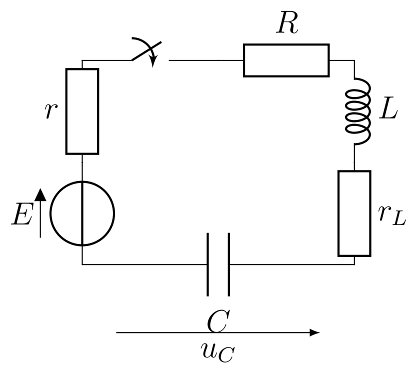
Vue l'expression de v, dans les premiers instants après $t = 0$, $v < 0$.

R19. Que peut-on dire de la vitesse quand la position est extrémale (minimale ou maximale) ?

Solution: La vitesse est nulle quand la position est extrémale.

Exercice n°3 Étude d'un circuit RLC

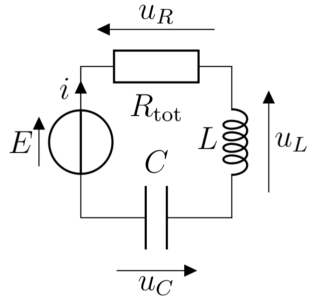
On étudie la réponse d'un circuit RCL série constitué, d'un condensateur de capacité $C = 1,0$ nF, d'une résistance $R = 100\ \Omega$, d'une bobine réelle (modélisée par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L et d'une résistance r_L) en série alimenté par un générateur réel modélisé par son modèle de Thévenin, de force électromotrice E et de résistance interne $r = 50\ \Omega$.
Pour les temps $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé.
À l'instant initial, $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



R20. Déterminer la résistance R_{tot} équivalente aux résistances de ce circuit. Reproduire le circuit avec R_{tot}.

Solution:

Les trois résistances R, r et r_L sont en série, ainsi $\boxed{R_{\text{tot}} = R + r + r_L}$



R21. Déterminer, en justifiant très proprement la réponse, les valeurs de $u_C(0^+)$ et $\frac{du_C}{dt}(0^+)$, juste après la fermeture de l'interrupteur.

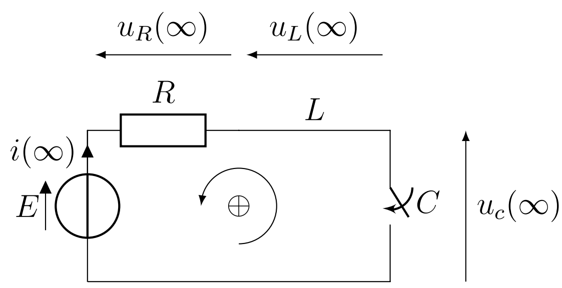
Solution: Le condensateur est initialement déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, d'où $u_c(0^+) = 0$
Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant est nulle, $i(0^-) = 0$.
L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-)$, d'où $i(0^+) = 0$
Or $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$, donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0}$

R22. Déterminer l'intensité du courant dans le circuit et la tension aux bornes du condensateur une fois le régime permanent atteint.

Solution:

Une fois le régime permanent atteint, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
On déduit immédiatement de ces comportements : $i(\infty) = 0$; $u_R(\infty) = 0$; $u_L(\infty) = 0$
La loi des mailles donne $u_c(\infty) = E$



R23. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$, et l'écrire sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_C(\infty)$$

Identifier les expressions de ω_0, Q et $u_C(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

Solution:
Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut tout exprimer en fonction de u_c :

- Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
- Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, d'où : $u_L = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$
- Tension aux bornes de R_{tot} : $u_R = R_{\text{tot}}i = R_{\text{tot}}C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

Ainsi $u_c + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + R_{\text{tot}}C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R_{\text{tot}}}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{LC} = \dfrac{E}{LC}}$
On identifie :

- la pulsation propre (en rad/s) : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$;
- le facteur de qualité (sans unité) : $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R_{\text{tot}}}{L} \Leftrightarrow Q = \dfrac{L}{R_{\text{tot}}}\omega_0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{L}{R_{\text{tot}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, soit $\boxed{Q = \dfrac{1}{R_{\text{tot}}}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$
- Avec le second membre $\boxed{u_C(\infty) = E}$, la tension aux bornes du condensateur en régime permanent (en volt)

R24. Donner la solution générale de l'équation différentielle précédente, dans le cadre de l'évolution temporelle fournie ci-dessous. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.
Exprimer la pseudo-période, notée T, en fonction de ω_0 et Q.

Solution: L'évolution temporelle fournie est pseudo-périodique, donc $\Delta < 0$.

Les racines du polynôme caractéristique sont complexes : $X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Solution générale : $u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right) + u_C(\infty)$

La pseudo-pulsation s'écrit $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$, et la pseudo-période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$

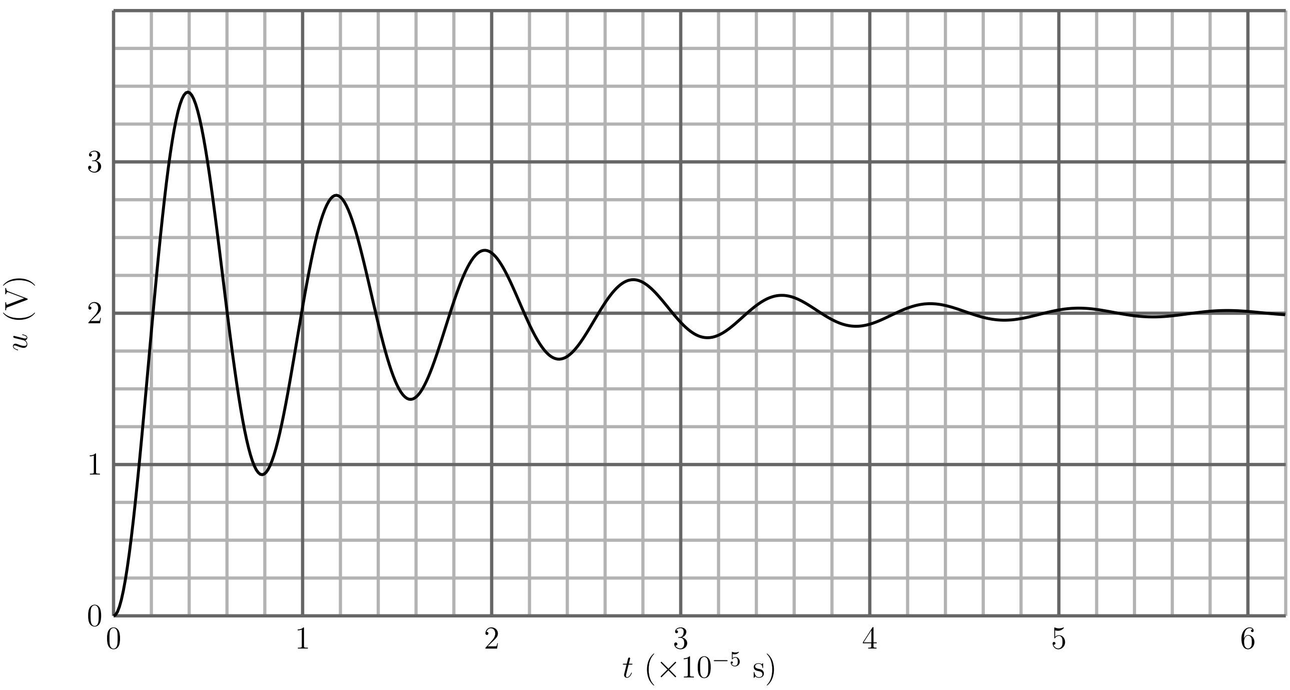
R25. Montrer que le décrément logarithmique, défini par $\delta = \ln\left(\frac{u_C(t) - u_C(\infty)}{u_C(t+T) - u_C(\infty)}\right)$, s'exprime uniquement en fonction de Q selon : $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$

L'expression pourra être admise pour la suite.

Solution: Expression du décrément logarithmique :

$$\begin{aligned}
u(t+T) - u(\infty) &= -u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)}\left(\cos(\Omega(t+T)) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega}\sin(\Omega(t+T))\right)\\
u(t+T) - u(\infty) &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}\left[-u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right]\\
u(t+T) - u(\infty) &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \times \left(u(t) - u(\infty)\right)\\
\delta &= \ln\left(\frac{1}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}}\right)\\
\delta &= \frac{\omega_0}{2Q}T\\
\delta &= \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$



R26. En exploitant le graphique, déterminer les valeurs de la pseudo-période et du décrément logarithmique.

Solution: Sur le graphe, on peut lire la pseudo-période : $\boxed{T = 8.10^{-6}\ \mathrm{s}}$ et le décrément logarithmique : $\delta = \ln \dfrac{3,5-2}{2,75-2} = \ln \dfrac{1,5}{0,75} = \ln(2)$

R27. À partir de la valeur du décrément logarithmique, déterminer la valeur de Q.

Solution: D'après l'expression du décrément, on en déduit l'expression de Q : $\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\delta^2} + \dfrac{1}{4}} = 4,6}$

R28. À partir de T, déterminer la valeur de ω_0.

Solution:
Attention à bien distinguer : la pulsation propre (la période propre) qui caractérise les oscillations en l'absence d'amortissement, ici de résistance, et la pseudo-pulsation (la pseudo-période) qui caractérise les oscillations pseudo-périodiques qui s'amortissent au cours du temps.

La pseudo-période est reliée à la pseudo-pulsation par : $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

La période propre est reliée à la pulsation propre par : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

D'après la pseudo-période, on peut en déduire la pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = 7,9.10^5\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$