

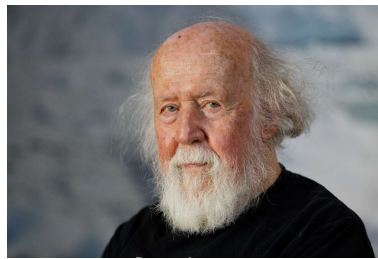
? Lundi 20 novembre 2023

Devoir Surveillé n°4 (2) – Corrigé

Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Commencer les réponses par une PHRASE.
- AUCUNE phrase ne peut commencer par donc, parce que, oui, non, du coup...
- Interdisez-vous d'utiliser « on » et « on a ».
- ENCADRER la grandeur et son expression LITTÉRALE FINALE.
- ⚠ DISTINGUER la pseudo-période et la période propre ; la pseudo-pulsation et la pulsation propre.

Exercice n°0 Qui est-ce ?



Solution: C'est Hubert Reeves, astrophysicien français, vulgarisateur hors pair. Il est décédé le 13 octobre 2023.

Exercice n°1 Questions de cours : Régime sinusoïdal forcé (MAX 30 min)

Pour les questions suivantes, en QCM, indiquez la ou les lettres des bonnes réponses sur votre copie.

R1. (bonus) Quels sont les mots correctement orthographiés ?

- A. **résonner** B. résoner C. raisonner D. résonnance E. **résonance** F. raisonance

R2. Un signal physique est donné par $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$. Le signal complexe associé est :

- A. $\underline{x} = X_0$ B. $\underline{x} = X_0 e^{j\omega t}$ C. $\underline{x} = X_0 e^{j\omega t + \frac{\pi}{2}}$ D. $\underline{x} = X_0 \cos(j\omega t)$

R3. Un signal physique est donné $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. Le signal complexe associé est :

- A. $\underline{x} = X_m e^{j\varphi}$ B. $\underline{x} = X_m e^{j\omega t + \varphi}$ C. $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ D. $\underline{x} = X_m \cos(j(\omega t + \varphi))$

R4. L'amplitude complexe $\underline{X_m}$ associée au signal complexe $\underline{x}$ précédent est telle que :

- A. $\underline{x} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$ B. $\underline{X_m} = X_m e^{\varphi}$ C. $\underline{x} = \underline{X_m} e^{j\varphi}$ D. $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$

R5. Soit un signal $x(t)$ de signal complexe associé $\underline{x}$. Quel est le signal complexe associé à $\frac{dx}{dt}$?

- A. $j\omega \underline{x}$ B. $\frac{\underline{x}}{j\omega}$ C. $j\omega t \underline{x}$ D. $\frac{\underline{x}}{j\omega t}$

R6. Soit le nombre complexe $2 + 3i$, et sa phase φ .

- A. $\tan(\varphi) = \frac{2}{3}$ B. $\tan(\varphi) = \frac{3}{2}$ C. $\varphi = \arctan(2/3)$ D. $\varphi = \arctan(3/2)$

R7. Soit le nombre complexe $-2 + 3i$, et sa phase φ .

- A. $\varphi = \pi - \arctan(3/2)$ B. $\varphi = \arctan(3/2) + \pi$ C. $\varphi = \pi + \arctan(2/3)$ D. $\varphi = \pi - \arctan(2/3)$

R8. Le module de $1 + j\omega\tau$ est

- A. $1 + \omega^2\tau^2$ B. $1 - \omega^2\tau^2$ C. $\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ D. $\sqrt{1 - \omega^2\tau^2}$

R9. Soit le nombre complexe $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$, où $\tau > 0$, on note φ son argument :

- A. $\tan(\varphi) = \omega\tau$ B. $\tan(\varphi) = \frac{1}{\omega\tau}$ C. $\tan(\varphi) = -\omega\tau$ D. $\tan(\varphi) = -\frac{1}{\omega\tau}$

Un oscillateur amorti excité de manière sinusoïdale, avec $x_0(t) = X_0 \cos(\omega t)$, obéit à l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0(t)$$

R10. Pourquoi, en régime établi sinusoïdal forcé, cherche-t-on $x(t)$ sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$?

Solution: La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène $x_H(t)$ et de la solution particulière. Au bout de quelques τ (durée caractéristique du régime transitoire), la solution homogène vaut zéro, et la solution de l'équation différentielle vaut la solution particulière. Cette dernière est recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire d'une fonction sinusoïdale de même pulsation ω que le second membre. L'amplitude et la phase à l'origine des temps sont différentes.

R11. Établir l'expression de $\underline{x}$ en fonction de X_0 , t , ω , ω_0 et Q .

Solution: En complexe :

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} &= \omega_0^2 \underline{x_0} \\ -\omega^2 \underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} &= \omega_0^2 \underline{x_0} \\ \underline{x} &= \frac{\omega^2 \underline{x_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}} \\ \underline{x} &= \frac{\omega^2 X_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}\end{aligned}$$

Soit $\underline{x} = \frac{\omega^2 X_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$

R12. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ de $\underline{x}$.

Solution: avec $\underline{x} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$, on en déduit $\underline{X_m} = \frac{\omega^2 X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$

R13. En déduire l'expression de l'amplitude X_m de $x(t)$.

Solution: L'amplitude X_m est le module de $\underline{X_m}$: $X_m = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$

R14. Comment obtenir φ à partir de X_m ? Le calcul n'est pas demandé.

Solution: $\varphi = \arg(X_m)$

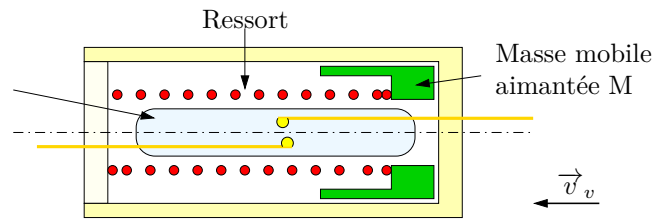
Exercice n°2 Détection d'accélération d'un airbag (40 min)

L'airbag est un dispositif permettant de déployer un coussin gonflant lors d'un choc afin de protéger les passagers d'un véhicule.

Le déclenchement du système se fait à l'aide d'un détecteur de décélération basé sur le mouvement d'une masse mobile aimantée (source de freinage et déclencheur du contacteur) attachée à un ressort, venant déclencher un contact électrique lorsque la décélération devient forte.



Ampoule de verre sous vide contenant deux lames métalliques qui se collent lorsqu'elles sont soumises au champ magnétique de la masse mobile M.



Le système est modélisé par une masse m retenue par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et freinée par une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. On s'intéresse ici au mouvement de la masse lors d'une décélération a_0 (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). On peut montrer que l'équation d'évolution de la position de la masse s'écrit comme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ et $x_e = \ell_0 - \frac{ma_0}{k}$

R15. Préciser la signification physique de x_e .

Solution: x_e est la position d'équilibre de la masse mobile, une fois le régime transitoire terminé c'est la position que va occuper la masse mobile.

On se place dans notre étude dans le cas où le coefficient d'amortissement est très faible $\zeta < 1$ car on souhaite que le déclenchement de l'airbag soit le plus rapide possible.

R16. Établir la solution de l'équation différentielle si on considère les conditions initiales suivantes : $x(0) = \ell_0$ et $\frac{dx}{dt} = v(0) = 0$

Solution:

1. Solution homogène de l'équation homogène?

Polynôme caractéristique : $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)$

Si $\zeta \ll 1$, alors $\Delta < 0$

Racines : $r = -\omega_0\zeta \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$

Solution homogène : $x(t) = e^{-\omega_0\zeta t} (A \cos(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t) + B \sin(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t))$

2. Solution particulière : $x_p = x_e$

3. Solution générale $x(t) = e^{-\omega_0\zeta t} (A \cos(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t) + B \sin(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t)) + x_e$

On identifie avec la forme fournie : $\tau = \frac{1}{\omega_0\zeta}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$

4. $x(0) = \ell_0 = A + x_e$, donc $A = \ell_0 - x_e + \frac{ma_0}{k} = \frac{ma_0}{k}$

$$\dot{x}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = 0, \text{ soit } B = \frac{A}{\Omega\tau} = \frac{ma_0}{k\Omega\tau}$$

Soit $x(t) = \frac{ma_0}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) + x_e$

R17. Montrer que la vitesse de la masse peut se mettre sous la forme

$$v(t) = -A \left(\frac{1 + \tau^2 \Omega^2}{\tau^2 \Omega} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \sin(\Omega t)$$

On exprimera les constantes A , Ω et τ en fonction des données de l'énoncé. Comment appelle-t-on Ω ? Que caractérise τ ?

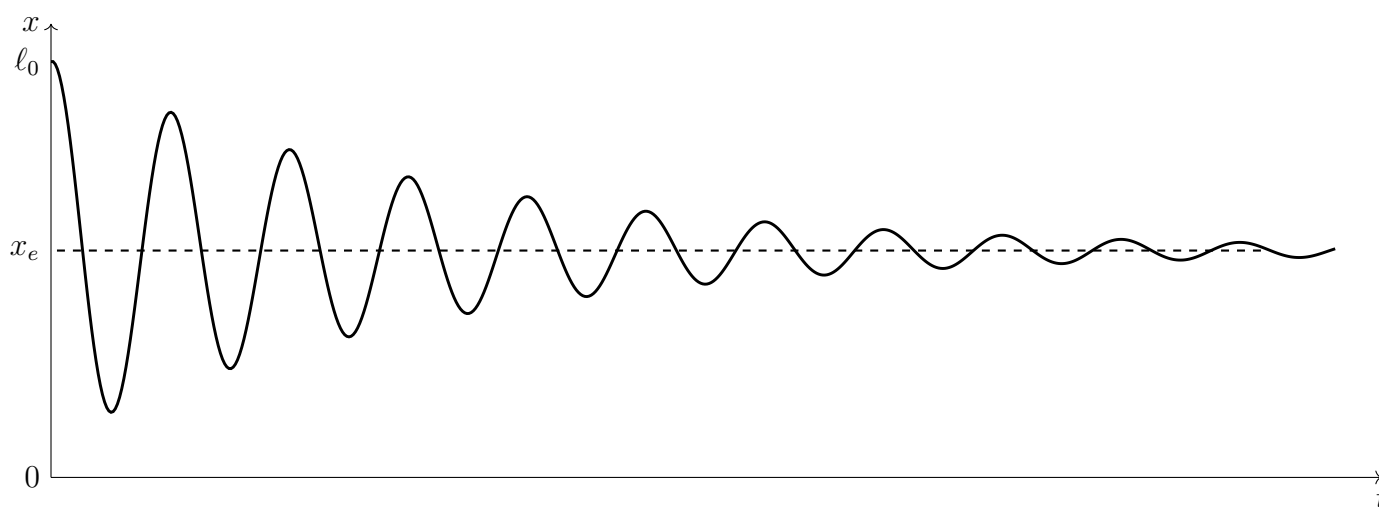
Solution:

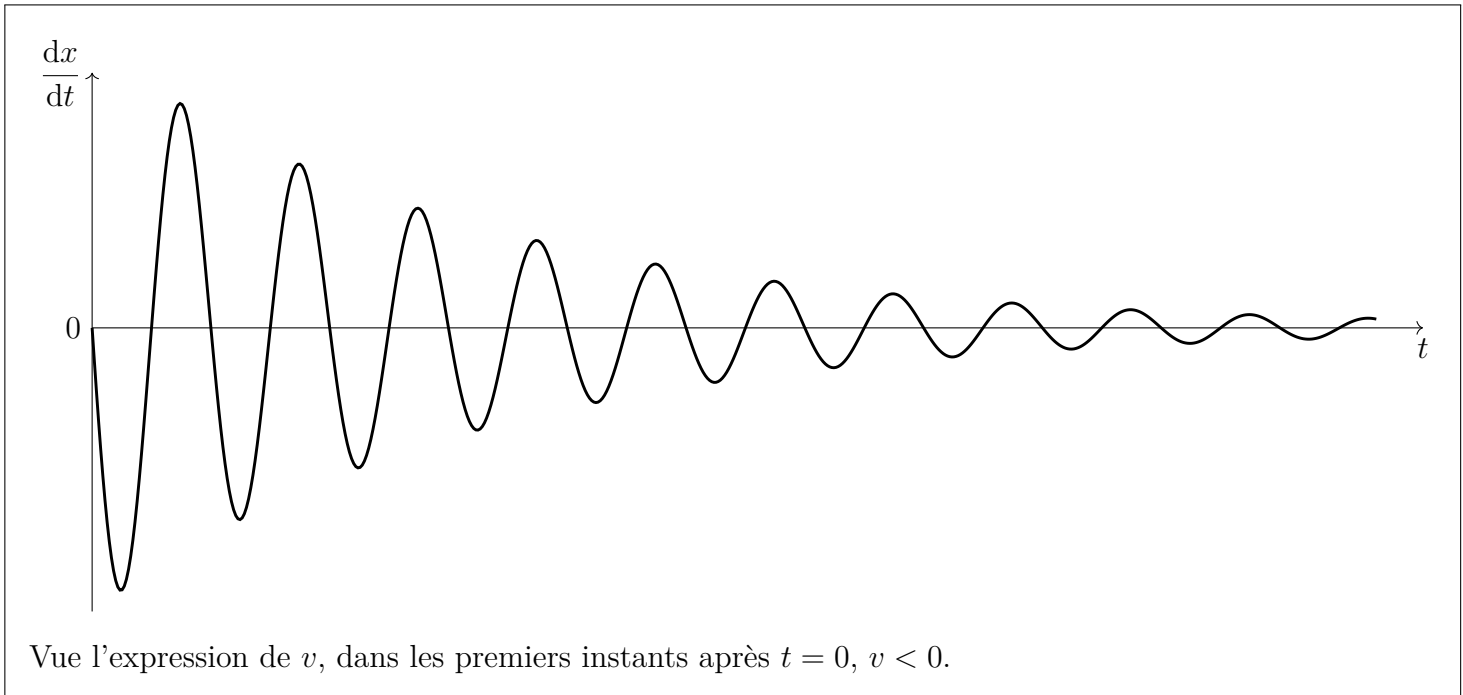
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{ma_0}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) - \Omega \sin(\Omega t) + \frac{1}{\tau} \cos(\Omega t) \right) \\ &= \frac{ma_0}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\Omega\tau} - \Omega \right) \sin(\Omega t) \\ &= \frac{ma_0}{k} \times \frac{-\Omega^2 \tau^2 - 1}{\Omega \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

Soit, $v(t) = -\frac{ma_0}{k} \left(\frac{1 + \tau^2 \Omega^2}{\tau^2 \Omega} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$

R18. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $x(t)$ et de $v(t)$ sur une dizaine de périodes.

Solution:





R19. Déterminer l'instant t_d où $x(t)$ est minimal.

Solution: x est extrémal quand $\dot{x}$ s'annule

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \sin(\Omega t) = 0 \Leftrightarrow \Omega t = n\pi \Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{\Omega}$$

D'après les deux courbes tracées précédemment, l'instant auquel x est minimal correspond à la première annulation de $\dot{x}$ (hors $t = 0$) l'instant

$$t_d = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{T}{2}$$

R20. On note $d = x(t_d)$ la valeur de la distance minimale de la masse à la base du ressort. Donner l'expression de d en fonction de a_0, ℓ_0, m, k, τ et Ω .

Solution: D'après l'expression de x :

$$\begin{aligned} d &= x(t_d) \\ &= \frac{ma_0}{k} e^{-\frac{\pi}{\Omega\tau}} \times (-1 + 0) + x_e \end{aligned}$$

Soit
$$d = -\frac{ma_0}{k} e^{-\frac{\pi}{\Omega\tau}} + \ell_0 - \frac{ma_0}{k}$$

R21. Le contact électrique (donc le déclenchement de l'airbag) se produit si $d < \frac{\ell_0}{2}$. Déterminer la décélération minimale $a_{0,\min}$ nécessaire au déclenchement de l'airbag en fonction de ℓ_0, k, m et ζ .

Solution: Le contact électrique (donc le déclenchement de l'airbag) se produit si

$$\begin{aligned} d &< \frac{\ell_0}{2} \\ -\frac{ma_0}{k} e^{-\frac{\pi}{\Omega\tau}} + \ell_0 - \frac{ma_0}{k} &< \frac{\ell_0}{2} \\ \frac{ma_0}{k} (e^{-\frac{\pi}{\Omega\tau}} + 1) &> \frac{\ell_0}{2} \\ a_0 &> \frac{k\ell_0}{2m(1 + e^{-\frac{\pi}{\Omega\tau}})} \\ a_0 &> \frac{k\ell_0}{2m(1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}})} \end{aligned}$$

La décélération doit être au moins de
$$a_{0,\min} = \frac{k\ell_0}{2m \left(1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)}$$

On donne les caractéristiques du capteur $m = 10 \text{ g}$, $\ell_0 = 2,0 \text{ cm}$, $\zeta = 0,5$, $k = 55 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

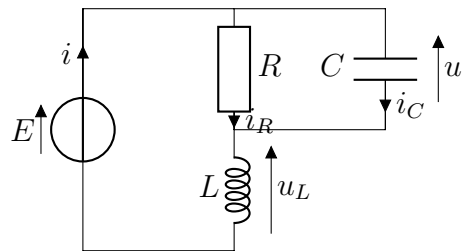
R22. Vérifier que le capteur est capable de détecter des décélérations de $5g$.

Solution: A.N. $a_{0,\min} = 47,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, or $5g = 49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ Par conséquent $5g > a_{0,\min}$, donc les décélérations de $5g$ peuvent être détectées par le capteur.

Exercice n°3 Étude d'un circuit RLC (40 min)

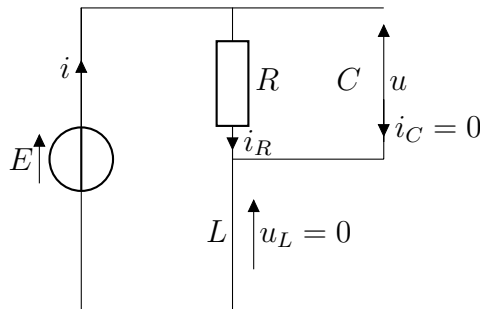
Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé.

L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.



R23. Par une étude du circuit en régime permanent, déterminer la valeur de u en régime permanent.

Solution: En régime permanent



soit $i_C(\infty) = 0$, $u_L(\infty) = 0$. La loi des mailles donne $u(\infty) = E$

R24. Établir l'équation différentielle et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u(\infty)$$

Identifier les expressions de Q , ω_0 et $u(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \text{Loi des mailles : } u_L + u &= E \\
 \text{Loi des nœuds : } i &= i_R + i_C \\
 \text{Loi d'Ohm : } u &= Ri_R \\
 \text{Loi du condensateur : } i_C &= C \frac{du}{dt} \\
 \text{Loi de la bobine : } u_L &= L \frac{di}{dt} \\
 E - u &= L \frac{d}{dt} (i_R + i_C) \\
 E - u &= L \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \right) \\
 E - u &= \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} \\
 LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u &= E \\
 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} &= \frac{E}{LC}
 \end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$, soit $Q = RC\omega_0$,

soit $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

R25. Déterminer les deux conditions initiales nécessaires à la résolution.

Solution:

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u(0^-) = 0$. Par continuité aux bornes du condensateur,

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Par continuité à travers l'intensité, $i(0^+) = i(0^-) = 0$

La loi d'Ohm donne $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$

Enfin, la loi des nœuds donne $i_C(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+) = 0$

La loi du condensateur donne $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$

R26. Donner la solution générale de l'équation différentielle précédente, dans le cadre de l'évolution temporelle fournie ci-dessous. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration. Exprimer la pseudo-période, notée T , en fonction de ω_0 et Q .

Solution: L'évolution temporelle fournie est pseudo-périodique, donc $\Delta < 0$.

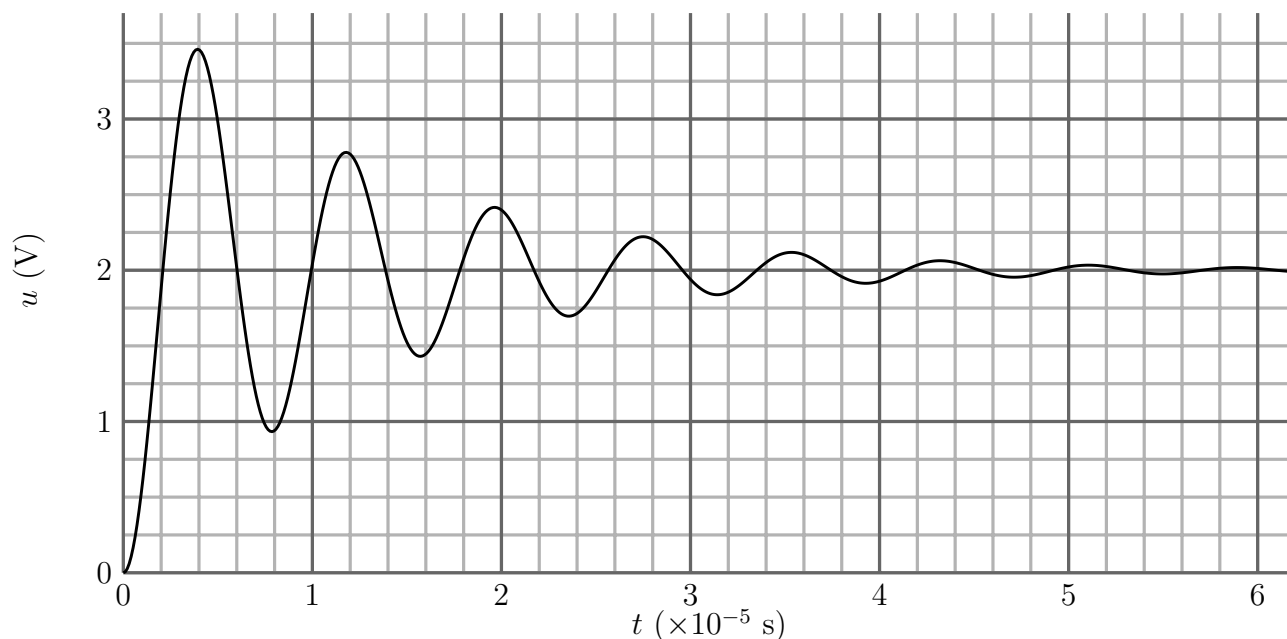
Les racines du polynôme caractéristique sont complexes : $X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Solution générale : $u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos \left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t \right) + B \sin \left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t \right) \right) + u(\infty)$

La pseudo-pulsation s'écrit $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, et la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Le décrément logarithmique est défini par $\delta = \ln \left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+T) - u(\infty)} \right)$

R27. En exploitant le graphe fourni, déterminer les valeurs de ω_0 et Q .



Solution:

Expression du décrément logarithmique :

$$u(t+T) - u(\infty) = -u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)} \left(\cos(\Omega(t+T)) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega} \sin(\Omega(t+T)) \right)$$

$$u(t+T) - u(\infty) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \left[-u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right]$$

$$u(t+T) - u(\infty) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \times (u(t) - u(\infty))$$

$$\delta = \ln \left(\frac{1}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}} \right)$$

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T$$

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Soit $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

Sur le graphe, on peut lire la pseudo-période : $T = 8.10^{-6} \text{ s}$

et le décrément logarithmique : $\delta = \ln \frac{3,5 - 2}{2,75 - 2} = \ln \frac{1,5}{0,75} = \ln(2)$

D'après l'expression du décrément, on en déduit l'expression de Q : $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} = 4,6$

D'après la pseudo-période, on peut en déduire la pulsation propre : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 7,9.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Attention à bien distinguer : la pulsation propre (la période propre) qui caractérise les oscillations en l'absence d'amortissement, ici de résistance, et la pseudo-pulsation (la pseudo-période) qui caractérise les oscillations pseudo-périodiques

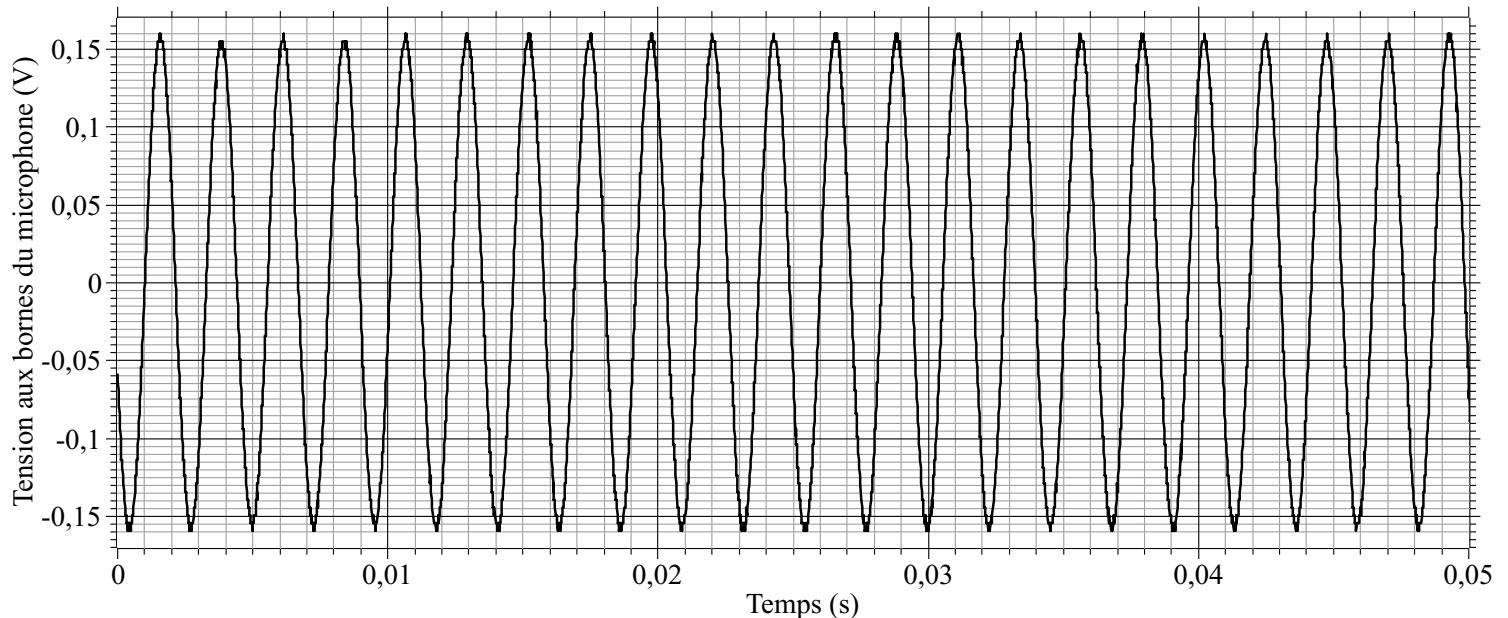
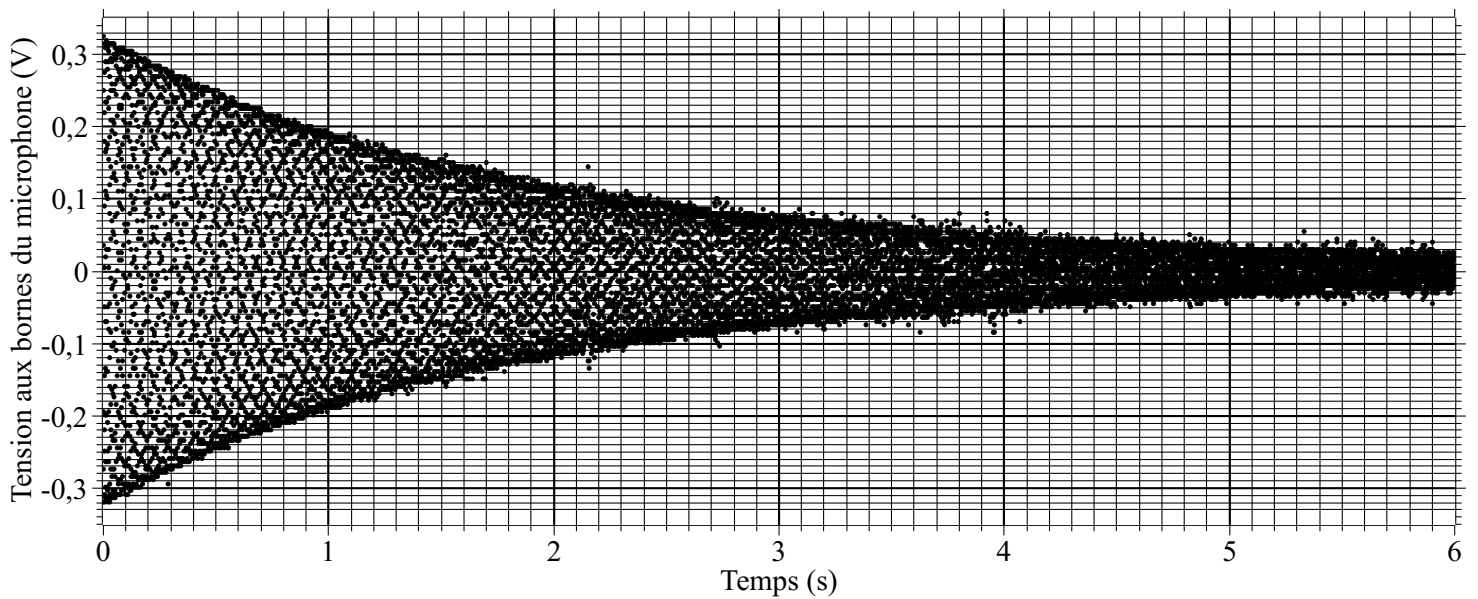
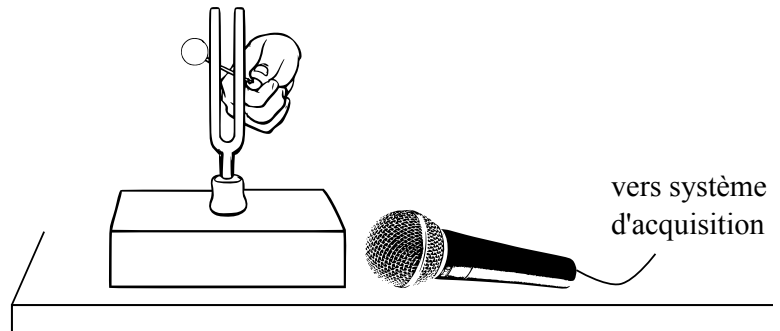
qui s'amortissent au cours du temps.

La pseudo-période est reliée à la pseudo-pulsation par : $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

La période propre est reliée à la pulsation propre par : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Exercice n°4 Diapason (10 min)

Pour estimer le facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore. On obtient les deux enregistrements présentés ci-dessous.



R28. Estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason.

Solution: Le système est très peu amorti, le système oscille très longtemps, ainsi la pseudo-période se confond avec la période propre.

Sur le 2^e graphe, on peut lire la période propre : $T_0 = \frac{0,016}{8} \text{ s} = 0,002 \text{ s}$, donc la fréquence propre vaut $f_0 = 500 \text{ Hz}$

Le 1^{er} graphe, nous permet d'évaluer la constante de temps caractéristique d'amortissement τ , qui est l'instant auquel $u(\tau) = 0,37 \times u(0) = 0,37 \times 0,33 \text{ V} = 0,12 \text{ V}$. On lit $\tau = 0,9 \text{ s}$

Or $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, soit $Q = \frac{\tau\omega_0}{2} = \tau\pi f_0 \approx 1400!!$