Lundi 6 novembre 2023

Devoir Surveillé n°3 (2) – *Corrigé*

Consignes générales :

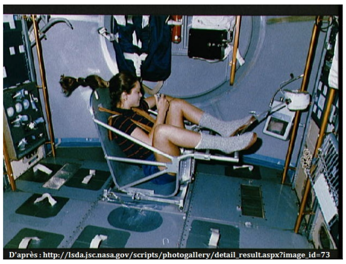
- Faites des SCHÉMAS ! ! ! !
- Commencer les réponses par une PHRASE qui NE commence PAS par donc, parce que, oui, non, du coup...
- Interdisez-vous d'utiliser « on .... » et « on a ».
- ENCADRER l'expression LITTÉRALE FINALE.

Exercice n°0 Qui est-ce ?

Solution: Anne L'Huillier (5e femme à l'avoir !) prix nobel de physique 2023, pour ses travaux sur les lasers qui émettent des impulsions de quelques attosecondes, ce qui permet de suivre les mouvements des électrons lors de réactions chimiques.

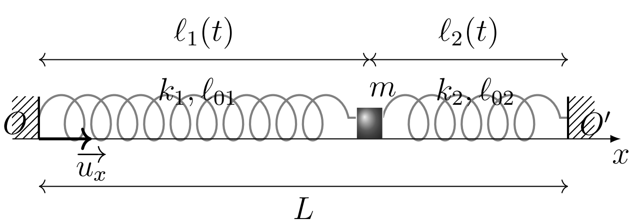
Exercice n°1 Comment se peser dans l'espace ? *(Durée ∼ 45 min)*

En apesanteur, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont pas fonctionnels suite à l'absence de gravité. Il est possible d'utiliser un système original, constitué d'une chaise attachée à deux ressorts situés de chaque côté, la chaise pouvant glisser sans frottement sur le sol horizontal.



Étude physique du système

Une masse m reliée à deux ressorts fixés en O et O' glisse sans frotter sur le sol. La position de la masse est repérée par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x}$. Les ressorts ont pour raideurs respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide respectives ℓ_{01} et ℓ_{02}. La longueur OO' est notée L, et vaut $L = \ell_{01} + \ell_{02}$.



Solution: Système : point matériel $M(m)$
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\overrightarrow{g}$

— réaction du support $\overrightarrow{R_N}$

— force de rappel élastique 1 : $\overrightarrow{f_1} = -k_1(\ell_1(t) - \ell_{01})\overrightarrow{u_x}$, avec $\ell_1(t) = x(t)$

Soit $\boxed{\overrightarrow{f_1} = -k_1(x(t) - \ell_{01})\overrightarrow{u_x}}$

— force de rappel élastique 2 : $\overrightarrow{f_2} = -k_2(\ell_2(t) - \ell_{02})(-\overrightarrow{u_x})$, avec $\ell_2(t) = L - x(t)$

Soit $\boxed{\overrightarrow{f_2} = k_2(L - x(t) - \ell_{02})\overrightarrow{u_x} = k_2(\ell_{01} - x(t))\overrightarrow{u_x}}$

R1. Établir l'expression de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ en fonction de ℓ_{01}.

Solution:
à l'équilibre : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} - k_1(x_{\text{éq}} - \ell_{01})\overrightarrow{u_x} + k_2(\ell_{01} - x_{\text{éq}})\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0}$
Selon $\overrightarrow{u_x}$: $-x_{\text{éq}}(k_1 + k_2) + k_1\ell_{01} + k_2\ell_{01} = 0$
Soit $\boxed{x_{\text{éq}} = \ell_{01}}$

R2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
La mettre sous forme canonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de k_1, k_2 et m.
Vérifier l'expression du second membre avec l'expression établie précédemment pour $x_{\text{éq}}$.

Solution: Principe fondamental de la dynamique à $M(m)$ dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} - k_1(x(t) - \ell_{01})\overrightarrow{u_x} + k_2(L - x(t) - \ell_{02})\overrightarrow{u_x}$$

Le mouvement a lieu uniquement selon $\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$
Selon $\overrightarrow{u_x}$:

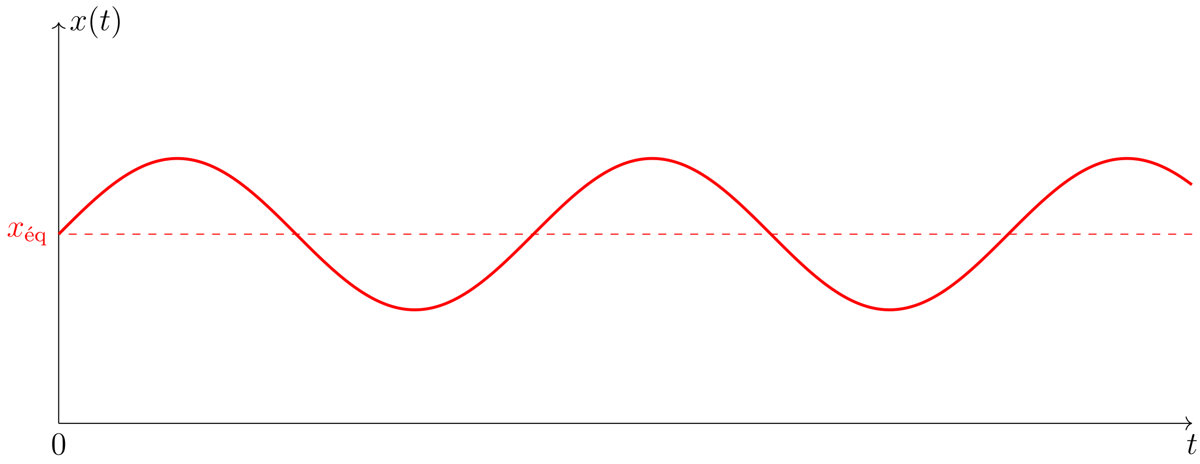
$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k_1(x(t) - \ell_{01}) + k_2(\ell_{01} - x(t)) \\
m\ddot{x} &= -(k_1 + k_2)x(t) + k_1\ell_{01} + k_2\ell_{01} \\
m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x(t) &= k_1\ell_{01} + k_2\ell_{01} \\
\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x(t) &= \frac{k_1\ell_{01} + k_2\ell_{01}}{m} \\
\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x(t) &= \frac{k_1 + k_2}{m} \times \frac{k_1\ell_{01} + k_2\ell_{01}}{k_1 + k_2} \\
\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) &= \omega_0^2 x_{\text{éq}}
\end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$

Et on vérifie que $\boxed{x_{\text{éq}} = \ell_{01}}$

R3. Sans la résoudre, décrire le mouvement de la masse et tracer l'évolution de $x(t)$ si la position initiale vaut $x(0) = x_{\text{éq}}$ et la vitesse initiale vaut $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

Solution: La masse $M(m)$ oscille sinusoïdalement dans le temps.



R4. Résoudre complètement l'équation différentielle en utilisant les conditions initiales précédentes.

Solution: La solution générale s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{éq}$
Or $x(0) = x_{éq} = A + x_{éq}$, donc $A = 0$
Vitesse : $\dot{x}(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$
Ainsi, à $t = 0$: $\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0$, donc $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$
Ainsi $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_{éq}}$

Comment se peser dans l'espace ?

Les deux ressorts sont de même constante de raideur : $k_1 = k_2 \equiv k = 300\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

R5. Quand la capsule est arrimée dans sa base de lancement, la chaise vide oscille avec la période $T_0 = \dfrac{\pi}{2}$ s. Calculer la masse m_0 de la chaise.

Solution: La pulsation propre s'exprime alors selon $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{2k}{m_0}}$
Soit $\boxed{m_0 = 2k \times \dfrac{T_0^2}{4\pi^2} = \dfrac{kT_0^2}{2\pi^2} = 37,5\ \text{kg}}$
Pour le calcul : $m_0 = \dfrac{300 \times \pi^2}{2\pi^2 \times 4} = \dfrac{150}{4} = \dfrac{75}{2}$

R6. Quand la capsule est en orbite autour de la Terre, l'astronaute s'assoit sur la chaise et mesure la période $T_0' = \dfrac{3\pi}{4}$ s. Combien pèse-t-il ?

Solution: La masse totale s'écrit $m_{tot} = m + m_0$
On a $m_{tot} = \dfrac{k(T_0')^2}{2\pi^2}$, soit $\boxed{m = \dfrac{k(T_0')^2}{2\pi^2} - m_0 = \dfrac{k}{2\pi^2}(T_0'^2 - T_0^2) = 47,6\ \text{kg}}$
Pour le calcul : $m = \dfrac{300}{2\pi^2}\left(\dfrac{3^2\pi^2}{4^2} - \dfrac{\pi^2}{4}\right) = 150\left(\dfrac{9}{16} - \dfrac{1}{4}\right) = 75\left(\dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{375}{8} = 46,8$ (en posant la division).

Approche énergétique

On se place dans le cas où les deux ressorts sont identiques, c'est-à-dire $k_1 = k_2$ (que l'on notera k) et $\ell_{01} = \ell_{02}$ (que l'on notera ℓ_0).

R7. Établir l'expression de l'énergie mécanique, à t quelconque, en fonction de v_0 et m. Commenter.

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_m &= \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{p,\text{él}1} + \mathscr{E}_{p,\text{él}2} \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell_1-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2-\ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(L-x-\ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_0-x)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + 2\times\frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + k\frac{v_0^2}{\frac{2k}{m}}\sin^2(\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique se conserve, ce qui est conforme à la modélisation dans laquelle aucun frottement n'a été pris en compte.

Exercice n°2 Lectures graphiques *(Durée ∼ 10 min)*

On donne différentes évolutions temporelles possibles d'un oscillateur harmonique mécanique selon les conditions initiales.

R8. Associer, en justifiant précisément, chaque courbe avec l'expression correspondante.

Solution:

- Figure 1 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) > 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas c), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = \dfrac{v_0}{\omega_0} > 0$
- Figure 2 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) = 0$ (tangente à l'origine horizontale) : c'est le cas a), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$
- Figure 3 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) < 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas d), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = -\dfrac{v_0}{\omega_0} < 0$
- Figure 4 : le système part de $x(0) = 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) < 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas b), où $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -\dfrac{v_0}{\omega_0} < 0$

R9. Déterminer les valeurs de a.

Solution: Dans les trois premiers cas : $x(0) = a = 2$ cm

R10. Déterminer la période propre, la pulsation propre et l'amplitude de la figure **??**. Comment en déduire v_0 ?

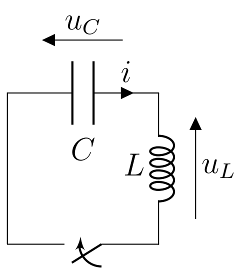
Solution:

- Période propre $T_0 = 3,0$ s
- Pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

— Amplitude figure **??** : $X_m = 3,2$ cm, or $X_m = \sqrt{a^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, donc $\boxed{v_0 = \omega_0\sqrt{X_m^2 - a^2}}$

Exercice n°3 Étude d'un circuit LC *(Durée ∼ 25 min)*

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur et d'une bobine idéale.
Pour $t < 0$, le condensateur a été chargé sous la tension $U_0 > 0$.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine.

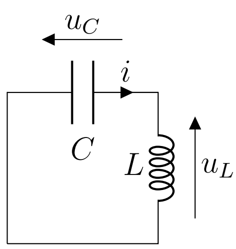


R11. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit.
Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

et identifier la pulsation propre du circuit.

Solution:
Loi des mailles : $u_C + u_L = 0$
Relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
Relation de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Ainsi $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$



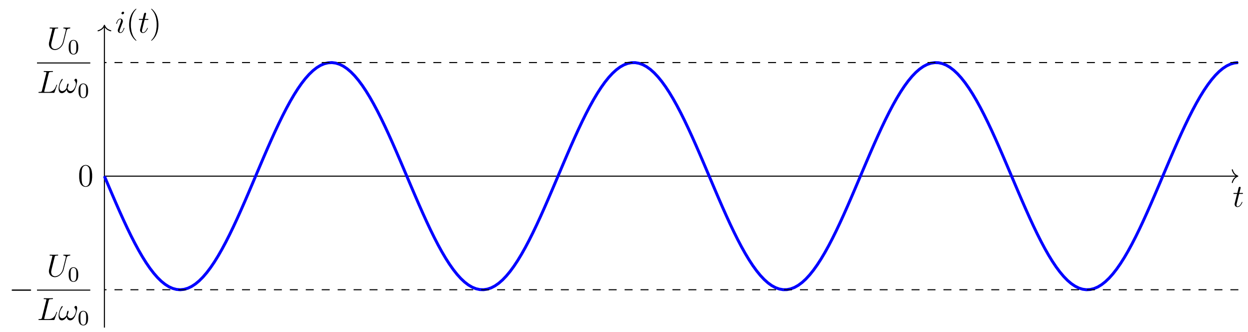
Enfin : $i = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i(t)}{LC} = 0}$, que l'on identifie avec $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i(t) = 0}$ qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

R12. Résoudre l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales.

Solution: La solution générale s'écrit $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.
$i(0^+) = 0 = A$
Dérivée de i par rapport au temps : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{-U_0}{L} = B\omega_0$, donc $B = \dfrac{-U_0}{L\omega_0}$.
Ainsi $\boxed{i(t) = -\dfrac{U_0}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

R13. Représenter l'allure de $i(t)$.

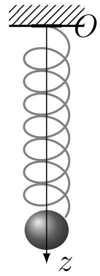
Solution:



Exercice n°4 Oscillateur mécanique amorti *(Durée ∼ 40 min)*

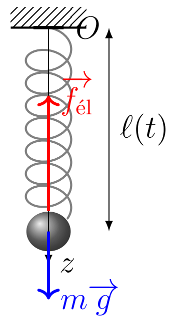
On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m accroché à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'axe vertical descendant est noté (Oz), avec O situé au point d'attache du ressort.

On modélise les frottements visqueux, c'est-à-dire les frottements exercés par un fluide (gaz ou liquide) visqueux, par une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, où α est une constante positive.



R14. Établir l'expression de la longueur du ressort $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre.

Solution:
- Système étudié : Masse m
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen sur la durée de l'expérience
- Bilan des actions mécaniques :
  - Poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{e_z}$
  - Force de rappel élastique : $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z}$
  - Force de frottement fluide : $\overrightarrow{f_{\text{frott}}} = -h\overrightarrow{v} = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$



À l'équilibre : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F} &= \overrightarrow{0} \\ -k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} + mg\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{0} \\ k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) &= mg \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}}$

R15. Établir l'équation différentielle vérifiée par z, et l'écrire sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q. Quelles sont les noms et unités de ω_0 et Q ?
On vérifiera la cohérence entre $z_{\text{éq}}$ identifié ici, et $\ell_{\text{éq}}$ établie précédemment.

Solution: Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel terrestre d'étude :
$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{élastique}}} + \overrightarrow{f_{\text{frott}}}$

Le mouvement ayant uniquement lieu selon l'axe vertical (Oz) : $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z}$, ainsi : $m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z} = mg\overrightarrow{e_z} - k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z} - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$.

En factorisant par $\overrightarrow{e_z}$: $\left(m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$

Or $\ell(t) = z(t)$, ainsi $m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg - k\ell_0 + kz + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}\ell_0$, avec $g + \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = \frac{k}{m}\ell_{\text{éq}}$

Enfin : $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{\text{éq}}}$

Cette équation différentielle est de la forme $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$

On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Et le facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, soit $Q = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{k}{m}}$, soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}}$

R16. On donne les valeurs des différents paramètres : $m = 0,10$ kg ; $k = 10$ N · m^{-1} et $\alpha = 0,5$ kg · s^{-1}. Calculer la valeur numérique Q. Quel est le régime transitoire que va suivre M ?

Solution: $Q = \frac{1}{0,5} = 2 > \frac{1}{2}$, le régime transitoire est donc pseudo-périodique.

R17. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle. On introduira deux constantes d'intégration. On fera intervenir les deux grandeurs $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Comment s'appelle Ω ?

Solution:

1. Résolution de l'équation homogène :
   a) Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
   b) Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$, car $Q > \frac{1}{2}$.
   c) Racines : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
   d) Solution homogène : $z_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)$, avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation.
2. Solution particulière : $z_P = z_{\text{éq}}$
   N'oubliez pas la solution particulière.
3. Solution générale : $\boxed{z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + z_{\text{éq}}}$

R18. À $t = 0$, $z(0) = z_{\text{éq}}$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 > 0$. Déterminer complètement l'évolution de $z(t)$.

Solution: Les constantes d'intégration se déterminent sur la

solution générale = solution homogène + solution particulière

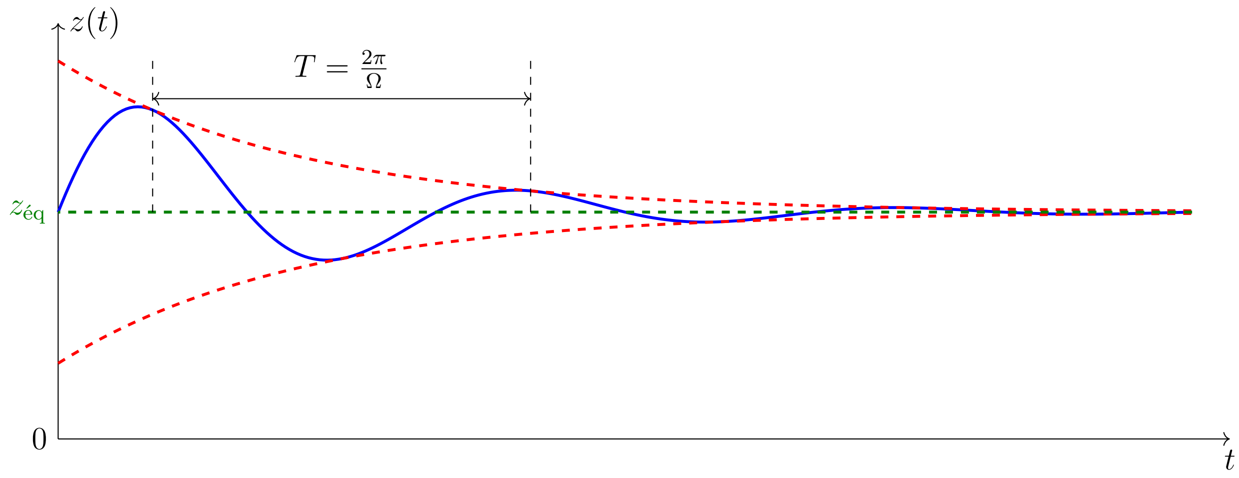
$z(0) = A + z_{\text{éq}} = z_{\text{éq}}$, donc $A = 0$

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\dfrac{1}{\tau}B\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$, donc $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = B\Omega$

Ainsi : $\boxed{z(t) = \dfrac{v_0}{\Omega}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t) + z_{\text{éq}}}$

R19. Représenter l'allure de $z(t)$. On fera apparaître dessus la pseudo-période.

Solution: Avec $Q = 2$, il y a ENVIRON deux oscillations visibles.



R20. Que caractérise τ ? Comment évolue-t-il si les frottements deviennent plus importants (toute chose égale par ailleurs) ?

Solution: La durée du régime transitoire est de quelques $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Compte-tenu des expressions de ω_0 et Q : $\tau = \dfrac{2m}{\alpha}$, cette durée diminue si les frottements deviennent plus importants.