Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

Chapitre n°8 Filtrage linéaire Filtres passifs

L'impédance d'un haut-parleur dépend fortement de la fréquence, ainsi la puissance de l'onde acoustique émise par un haut-parleur dépend de la fréquence. La bande passante les caractéristiques du haut-parleur. Afin de restituer un son de bonne qualité il est nécessaire de choisir le haut-parleur en fonction de la gamme de fréquences des sons que l'on souhaite émettre. Les sons audibles sont compris entre 20 Hz et 20 kHz, plusieurs haut-parleurs doivent être utilisés pour restituer fidèlement des sons sur toute cette gamme de fréquences. De plus, il faut envoyer en entrée de chaque haut-parleur que les signaux de fréquences situés dans la bande passante du haut-parleur. Un filtrage doit donc être effectué **en amont de chaque haut-parleur**.

En amont du haut-parleur transmettant les graves, il faut supprimer les hautes fréquences tout en conservant les basses fréquences, il faudra un filtre passe-bas. En amont du haut-parleur transmettant les aigües, il faudra un filtre passe-haut. Pour les fréquences intermédiaires, un filtre passe-bande pourra être utilisé.

Pré-requis

- PCSI : Thème Ondes et signaux.
  - Chapitre n°7. Oscillateurs amortis en RSF

Objectifs du chapitre

— Définir les notions nécessaires à l'étude des filtres, sur les signaux périodiques et sur les filtres.
— Étudier les filtres du premier et du deuxième ordre.
— Étudier la réponse d'un filtre à différents signaux.

Plan du cours

Programme officiel

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.5 Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. [TP] Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). [TP] Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale. [TP] Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – ☹ – Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.

2 – 🙂 – ☹ – Étblir l'expression de la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.

3 – 🙂 – ☹ – Que mesure un multimètre en DC ? en AC ? en AC+DC ?

4 – 🙂 – ☹ – Définir la fonction de transfert harmonique d'un filtre linéaire.

5 – 🙂 – ☹ – Définir le gain, la phase et le gain en décibels d'une fonction de transfert harmonique.

6 – 🙂 – ☹ – Définir le diagramme de Bode d'un filtre linéaire.

7 – 🙂 – ☹ – Qu'est-ce que l'échelle logarithmique ? Comment lit-on une fréquence sur une échelle logarithmique ?

8 – 🙂 – ☹ – Définir la pulsation de coupure à -3 dB et la bande passante à -3 dB. *On donnera les deux définitions : à partir du gain, et du gain en décibels.*
Comment la détermine-t-on par le calcul ? graphiquement ?

9 – 🙂 – ☹ – Tracer le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ ou d'un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

10 – 🙂 – ☹ – Comment déterminer les équations des asymptotes au diagramme de Bode en gain ? graphiquement et par le calcul ?

11 – 🙂 – ☹ – Expliquer la méthode à appliquer pour déterminer le signal de sortie d'un filtre connaissant le signal d'entrée (composée de plusieurs signaux sinusoïdaux) et la fonction de transfert ou le diagramme de Bode.

12 – 🙂 – ☹ – Quel filtre doit-on utiliser pour réaliser une moyenne ? une intégration ? une dérivation ? Dans quelle condition doit-on l'utiliser ? *Préciser la fréquence de coupure par rapport aux fréquences du signal.*

13 – 🙂 – ☹ – Que doit-on respecter quand on met en cascades plusieurs filtres pour que le fonctionnement de chaque filtre ne soit pas perturbé par la présence du suivant ?

I Signaux périodiques

I.1 Développement en série de Fourier d'un signal périodique

<u>Capacité exigible</u> : Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

I.1.a) Définition du DSF

À retenir : Développement en série de Fourier d'un signal périodique

Un **signal y périodique de période T et de fréquence f** peut s'écrire comme la **somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence f du signal** $y(t)$.

Le **<u>développement en série de Fourier</u>** de y s'écrit : $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)\Big)$, avec :

- A_0 : composante continue, c'est la moyenne du signal ;
- f : fréquence de $y(t)$, également la **<u>fréquence du fondamental f_1 ($n = 1$)</u>** ;
- $f_n = nf$: fréquence de l'**<u>harmonique de rang n</u>** ;
- A_n : amplitude de l'harmonique d'ordre n ;
- φ_n : la phase à l'origine des temps de l'harmonique d'ordre n .

L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné. En TP, on verra comment réaliser une telle opération avec l'oscilloscope ou un logiciel de traitement de données (regressi, logger pro).
À l'issue d'une analyse spectrale, on obtient :

— les fréquences f_n des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,
— l'amplitude A_n de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n,
— la phase à l'origine de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n.

I.1.b) Spectres

Définitions : Spectres

- Le **<u>spectre en amplitude</u>** représente les amplitudes A_n en fonction des fréquences f_n (ou des pulsations $\omega_n = 2\pi f_n$), il caractérise l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal.
  Le spectre se représente sous la forme de barres verticales de hauteur A_n et d'abscisse f_n.
- Le **<u>spectre en phase</u>** représente les phases φ_n en fonction des fréquences f_n.
  Le spectre se représente sous la forme de barres verticales reliant les points de coordonnées $(f_n, 0)$ et (f_n, φ_n).

Exercice de cours A Différents signaux périodiques
Considérons les deux signaux dont on donne les graphes et les développements en série de Fourier.

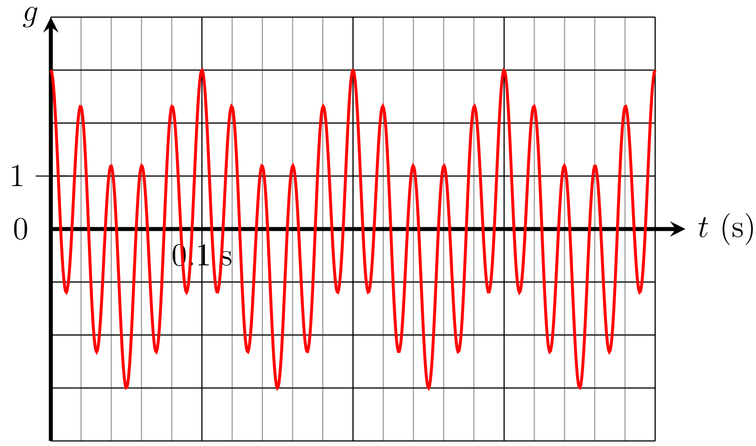


FIGURE 1 – Signal $g(t) = \cos(\omega_e t) + 2\cos(5\omega_e t)$

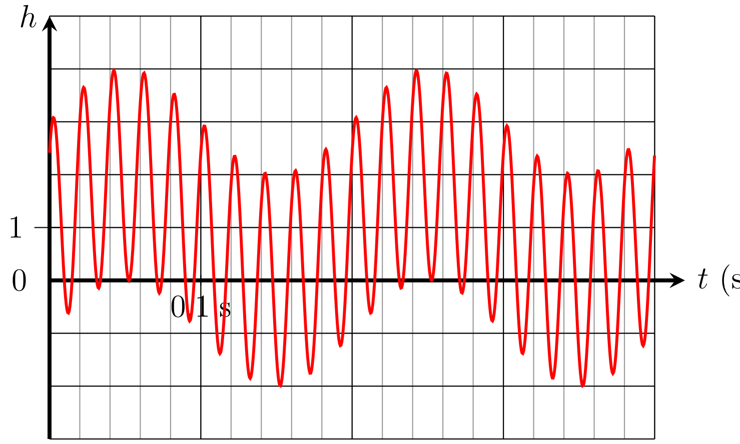


FIGURE 2 – Signal $h(t) = 1 + \cos\left(\omega_e t - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(5\omega_e t - \frac{\pi}{4}\right)$

Pour les deux signaux ci-dessus :

R1. Déterminer la période T_e, en déduire la fréquence f_e et la pulsation ω_e.

Solution: $T_e = 0,1$ s, donc $\omega_e = \dfrac{2\pi}{T_e} = 20\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}

R2. Déterminer les valeurs des amplitudes A_n, des phases à l'origine des temps φ_n et des pulsations ω_n des différents harmoniques du développement en série de Fourier.
Représenter les spectres en amplitude et en phase.

Solution:
- Signal $g(t)$:
  - Composante continue : $A_0 = 2$;
  - Fondamental : $A_1 = 4$; $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$
- Signal $h(t)$:
  - Composante continue : $A_0 = 1$;
  - Fondamental : $A_1 = 3$; $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$
  - Harmonique $n = 3$: $A_3 = 1$; $\varphi_3 = 0$
  - Harmonique $n = 5$: $A_5 = 1$; $\varphi_5 = -\dfrac{\pi}{4}$

Exercice de cours B Signaux créneau et triangulaire

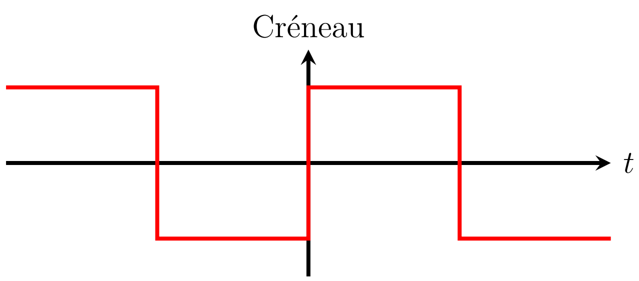


FIGURE 3 – Signal Créneau

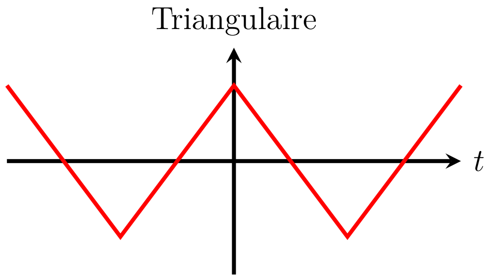


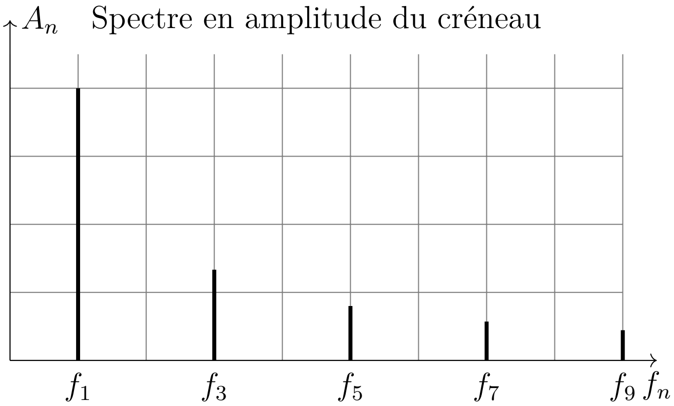
FIGURE 4 – Signal Triangulaire

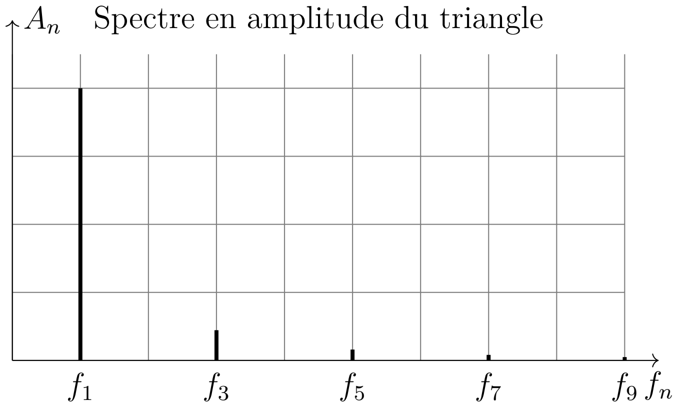
- Le développement en série de Fourier pour le signal carré d'amplitude A est donné par :
$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4A}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$

— Le développement en série de Fourier pour le signal triangulaire d'amplitude A est donné par :
$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{((2n-1)\pi)^2} \cos((2n-1)\omega t)$

Représenter l'allure des spectres des deux signaux ci-dessus (souvent utilisés en TP d'électricité).

Solution:





Les signaux créneau et triangle peuvent être reconstitués en utilisant leur développement, on parle de **synthèse des signaux**. La reconstitution du signal périodique est d'autant meilleure que l'on utilise un grand nombre d'harmoniques.

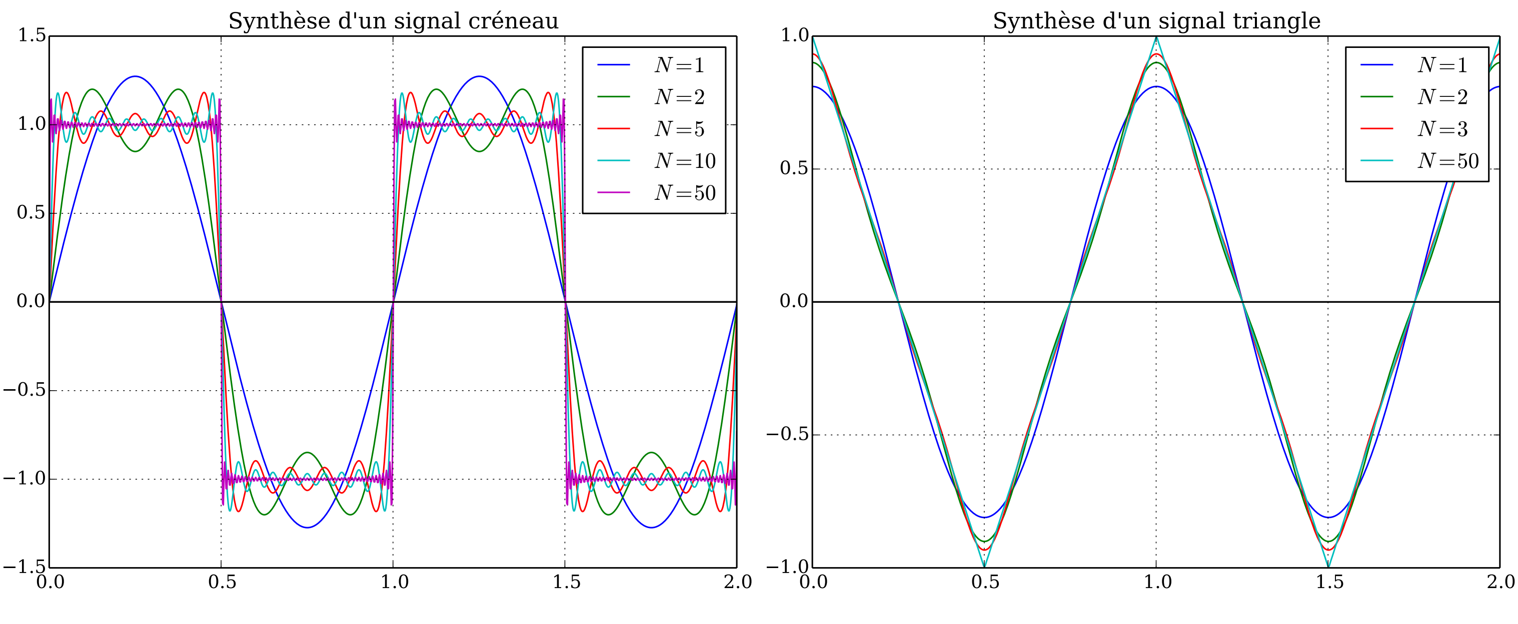


FIGURE 5 – Synthèses de signaux

I.2 Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique

I.2.a) Définitions

Capacité exigible : Définir valeur moyenne et valeur efficace.

Définitions : Valeur moyenne et valeur efficace

Considérons un signal y **périodique** de période T.

- La **valeur moyenne de y, notée $\langle y \rangle$**, est définie par : $\langle y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$
- **La valeur efficace de y, notée Y_{eff}**, est définie par : $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(y(t)\right)^2 \mathrm{d}t}$: c'est la

racine de la valeur moyenne du carré de y.

Capacité exigible : **Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.**

Valeur moyenne et valeur efficace des signaux sinusoïdaux

Déterminer :

R1. la valeur moyenne de $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$;

Solution:

$$\begin{aligned}
< i(t) > &= \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{\sin(\omega t + \varphi}{\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{A}{T} \times \frac{\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)}{\omega} \\
&= \frac{A}{T} \times \frac{\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)}{\omega} \\
&= \frac{A}{T} \times \frac{\sin(\varphi) - \sin(\varphi)}{\omega} \\
&= 0
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega T = 2\pi$ et le fait que la fonction sinus est $2\pi-$périodique.

R2. la valeur efficace de $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Solution:

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i(t))^2\mathrm{d}t} \\
I_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + \varphi)}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2T}\left\{\int_0^T \mathrm{d}t + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\mathrm{d}t\right\} \\
&= \frac{A^2}{2T}\left\{T + \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega}\right]_0^T\right\} \\
&= \frac{A^2}{2T}\left\{T + \frac{\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega}\right\} \\
&= \frac{A^2}{2T}\left\{T + \frac{\sin(4\pi + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega}\right\} \\
I_{\text{eff}}^2 &= \frac{A^2}{2} \\
I_{\text{eff}} &= \frac{A}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

À retenir : Valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal

La valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal de valeur moyenne nulle est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

I.2.b) Valeurs efficaces de signaux périodiques

Capacité exigible : Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

À retenir

La valeur efficace Y_{eff} d'un signal y périodique de période T dont le développement de Fourier est donné par $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$, dont la $n^{\text{ième}}$ harmonique $y_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ est de valeur efficace $Y_{n,\text{eff}} = \dfrac{A_n}{\sqrt{2}}$ est telle que :

$$\boxed{Y_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{eff}}^2} \Leftrightarrow Y_{\text{eff}} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{ext}}^2}$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

Interprétation : **La puissance électrique transportée par un signal périodique est la somme des puissances électriques transportées par chacune de ses harmoniques.**

REMARQUES

Valeurs efficaces de signaux périodiques

- La valeur efficace d'un signal triangulaire d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = \dfrac{S_m}{\sqrt{3}}$
- La valeur efficace d'un signal créneau d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = S_m$
- La valeur de la tension notée sur les appareils électriques domestiques est donnée en valeur efficace d'une tension sinusoïdale. En France, on utilise majoritairement une tension $U_{\text{eff}} = 230$ V ce qui correspond à une amplitude $U_m = 325$ V.

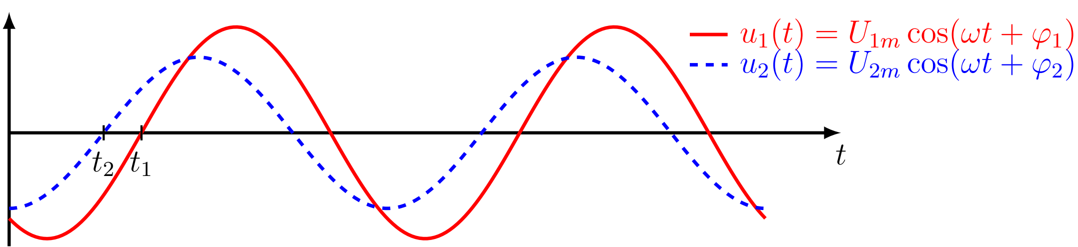
I.2.c) Mesures

À retenir : Mesures aux multimètres

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$
Mode DC	Valeur moyenne (composante continue)	$U_{\text{DC}} = U_0$
Mode AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$U_{\text{AC}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$
Mode AC+DC	Valeur efficace du signal complet	$U_{\text{AC+DC}} = \sqrt{U_0^2 + \dfrac{U_m^2}{2}}$

I.3 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

On considère deux signaux sinusoïdaux synchrones de même période T, et donc de même pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:



t_1 est tel que $\omega t_1 + \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\omega t_1 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_1$

t_2 est tel que $\omega t_2 + \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

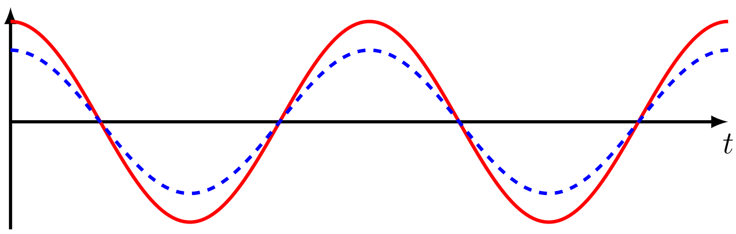
$\omega t_2 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_2$

On définit le déphasage de u_2 par rapport à u_1 par

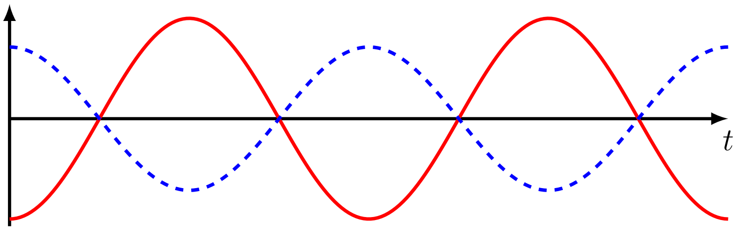
$$\boxed{\Delta_{2/1}\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi f(t_1 - t_2) = 2\pi \frac{t_1 - t_2}{T}}$$

Quelques déphasages particuliers :

u_1 et u_2 en phase : $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0[2\pi]$

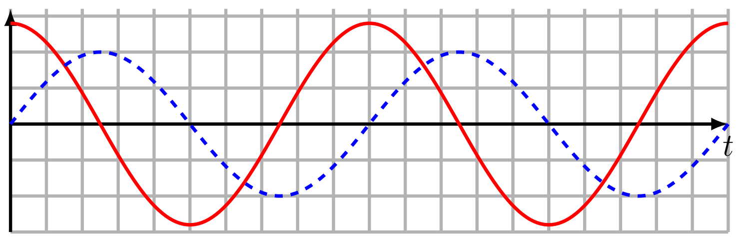


u_1 et u_2 en opposition de phase : $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \pm\pi[2\pi]$



$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

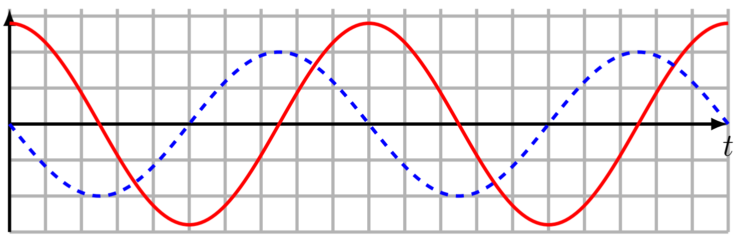
Si $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t)$,
alors $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \pi/2) = U_{2m}\sin(\omega t)$



u_2 est en **quadrature de phase** avec u_1 : ils sont décalés d'un quart de période, quand u_1 est nul, u_2 est extrémal, et inversement.
De plus, u_2 est **en retard** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **après** u_1, u_2 est en quadrature retard sur u_1.

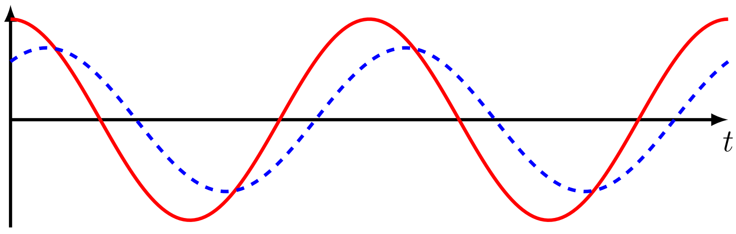
$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Si $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t)$,
alors $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \pi/2) = -U_{2m}\sin(\omega t)$



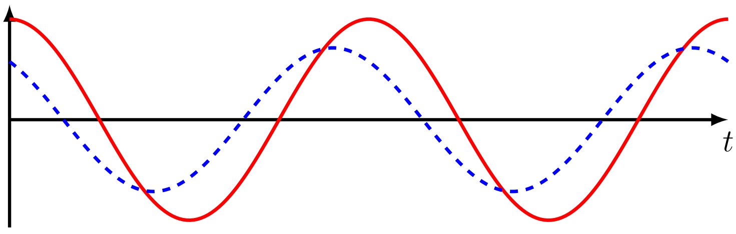
u_2 est en **quadrature de phase** avec u_1 : ils sont décalés d'un quart de période, quand u_1 est nul, u_2 est extrémal, et inversement.
De plus, u_2 est **en avance** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **avant** u_1, u_2 est en quadrature avance sur u_1.

$\varphi_2 - \varphi_1$ quelconque, avec $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$



u_2 est **en retard** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **après** u_1.

$\varphi_2 - \varphi_1$ quelconque, avec $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$



u_2 est **en avance** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **avance** u_1.

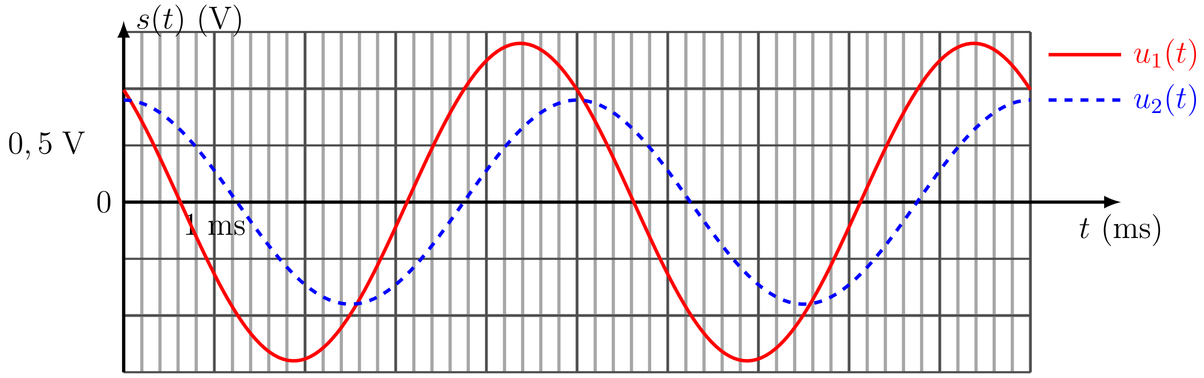
Méthode : Comment mesurer un déphasage entre deux signaux synchrones ?

On souhaite déterminer graphiquement le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$, périodiques de période T.

1. Mesurer la période T des signaux.
2. Déterminer si $u_2(t)$ est en avance ou en retard sur $u_1(t)$ pour déterminer le signe de $\Delta\varphi_{2/1}$.
   - Si u_2 est en avance sur u_1, alors $\Delta\varphi_{2/1} > 0$.
   - Si u_2 est en retard sur u_1, alors $\Delta\varphi_{2/1} < 0$.
3. Mesurer le retard Δt de u_2 par rapport à u_1 : c'est la plus petite durée séparant deux maxima (ou minimas, ou annulations) des signaux u_1 et u_2.

4. En déduire la valeur absolue du déphasage $\left|\Delta\varphi_{2/1}\right| = \dfrac{2\pi\Delta t}{T}$.
5. En déduire $\Delta\varphi_{2/1}$ (en tenant compte du signe déterminé précédemment).

Exercice de cours C Déterminer le déphasage entre u_2 et u_1.



Solution: s_2 est en retard sur s_1, donc $\Delta\varphi_{2/1} < 0$

Retard : $\Delta t = 0,6$ ms et Période : $T = 5$ ms

$|\Delta\varphi_{2/1}| = 2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = 0,24\pi$ rad, soit $\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = -0,24\pi \text{ rad}}$

II Fonction de transfert harmonique et diagramme de Bode

II.1 Filtre linéaire

Les signaux reçus sont souvent la superposition d'un ensemble de signaux :

— les signaux utiles, par ex signal téléphonique + signal informatique en entrée d'une prise ADSL ;

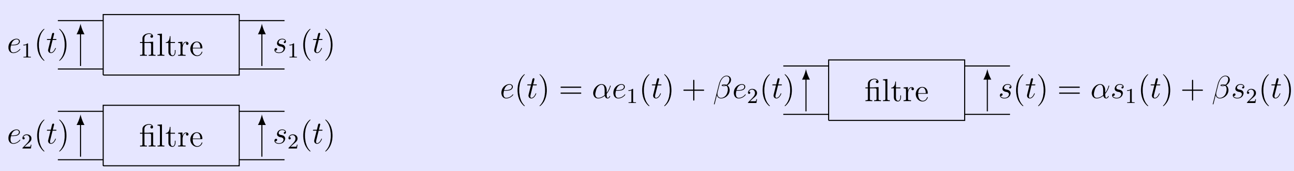
— les signaux parasites appelés « bruits » générés par l'environnement ;

et il est souvent nécessaire d'en extraire un parmi tous : c'est le but des filtres.

Définitions : Filtre

- Un **filtre** est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée à **bande passante**.
  Idéalement, les signaux dont la fréquence est en dehors de la bande passante sont arrêtés par le filtre. Dans la pratique, ils doivent être suffisamment atténués pour pouvoir être négligés.

- Un **filtre** est **linéaire** :
  - s'il ne contient que des composants linéaires ;
  - si c'est un système régi par une **équation différentielle linéaire** qui relie le signal d'entrée $e(t)$ (= signal d'origine) au signal de sortie $s(t)$ (= signal filtré) ;
  - si l'**entrée est un signal sinusoïdal de pulsation** ω, le **signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation** ;
  - si le **principe de superposition s'applique** : si $s_1(t)$ est la réponse du filtre à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse du filtre à $e_2(t)$ alors : $[\alpha.s_1(t) + \beta.s_2(t)]$ est la réponse du filtre à $[\alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t)]$.



II.2 Fonction de transfert harmonique

L'étude d'un filtre linéaire est menée **en régime sinusoïdal**, en utilisant la **notation complexe**.

$$\begin{array}{lllll} \text{Tension d'entrée} & u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t + \varphi_e) & \longrightarrow & \underline{u_e}(t) = \underline{U_{em}}e^{j\omega t} & \text{avec} \quad \underline{U_{em}} = U_{em}e^{j\varphi_e} \\ \text{Tension de sortie} & u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s) & \longrightarrow & \underline{u_s}(t) = \underline{U_{sm}}e^{j\omega t} & \text{avec} \quad \underline{U_{sm}} = U_{sm}e^{j\varphi_s} \end{array}$$

Définition : Fonction de transfert harmonique (FTH)

Lorsque la tension d'entrée u_e est sinusoïdale de pulsation ω, la tension de sortie u_s l'est également et on définit la <u>**fonction de transfert harmonique**</u> du quadripôle (à vide : $i_s = 0$) par :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}}$$

que l'on peut caractériser par :

- son module $|\underline{H}(j\omega)|$, appelé **gain**, noté G, sans dimension :

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}}$$

- son argument $\phi(\omega)$, appelé **phase**, noté ϕ, en radians :

$$\boxed{\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e}$$

c'est le **déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée**.

Définition : Ordre d'un filtre

On admet que toute fonction de transfert $\underline{H}$ peut se mettre sous la forme d'une fraction <u>**irréductible**</u> de deux polynômes, $\underline{N}$, $\underline{D}$, de variable $j\omega$: $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$. L'**ordre du filtre** correspond au degré de D.

II.3 Diagramme de Bode

II.3.a) Gain en décibels

Définition : Gain en décibels

On définit le **gain en décibels** comme étant 20 fois le logarithme du MODULE de la fonction de transfert :

$$G_{dB} = 20\log\left(\left|\,\underline{H}\,\right|\right)$$

Exercice de cours D

R1. Si $G = 1$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}$), alors $G_{dB} = 0$

R2. Si $G = 10^{-1}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/10$), alors $G_{dB} = 20$ dB

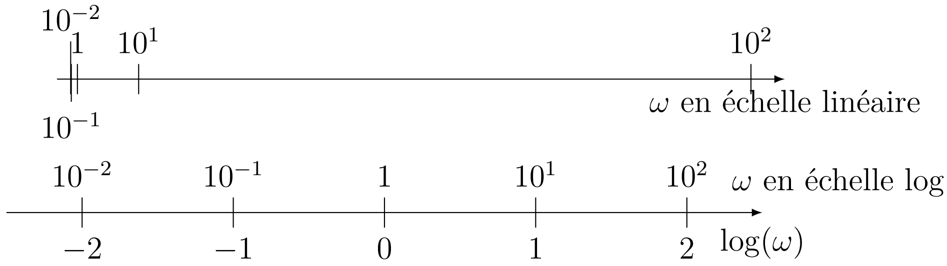
R3. Si $G = 10^{-2}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/100$), alors $G_{dB} = 40$ dB

II.3.b) Échelle logarithmique

<u>Capacité exigible</u> : Utiliser les échelles logarithmiques.
Dans les diagrammes de Bode, en abscisse, la pulsation est représentée à l'aide d'une **<u>échelle logarithmique</u>**. En passant d'une graduation à une autre, la pulsation est multipliée par le même facteur.

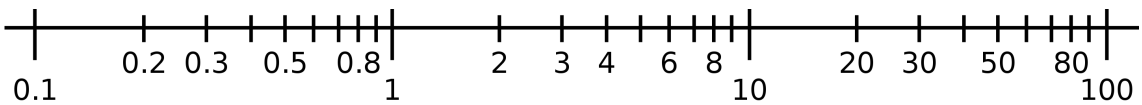
> **Définition : Échelle logarithmique**
> Une échelle logarithmique est un système de graduation en progression géométrique. Chaque pas multiplie la valeur par une constante positive. De ce fait, la position sur l'axe d'une valeur est proportionnelle à son logarithme.

On utilise l'échelle logarithmique, car un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement d'une unité en $\log(\omega)$. Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire.



> **Définition : Décade**
> Chaque intervalle de pulsation $\left[10^n, 10^{n+1}\right]$ est appelé **décade**.

Chaque décade occupe la même place en échelle logarithmique, ainsi il y a la même précision entre 10 et 100 Hz qu'entre 10^4 et 10^5 Hz...



II.3.c) Diagramme de Bode

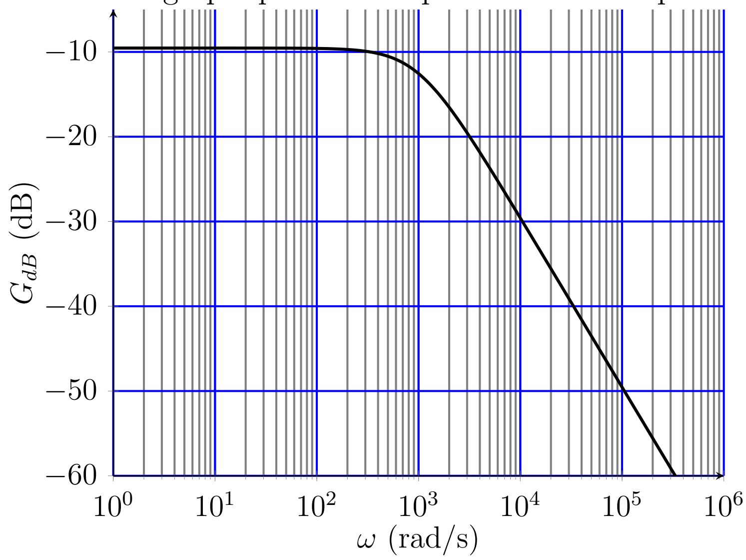
> **Définition : Diagramme de Bode**
> Le **<u>diagramme de Bode d'un filtre</u>** est la donnée de deux diagrammes :
>
> - le **diagramme en gain** : on représente le **gain en décibels** $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|)$ **de la fonction de transfert en fonction de la pulsation** ω (ou de la fréquence f) **en échelle logarithmique** ;
> - le **diagramme en phase** : on représente l'**argument de la fonction de transfert** $\phi = \arg(\underline{H})$ **en fonction de la pulsation** ω (ou de la fréquence f) **en échelle logarithmique**.

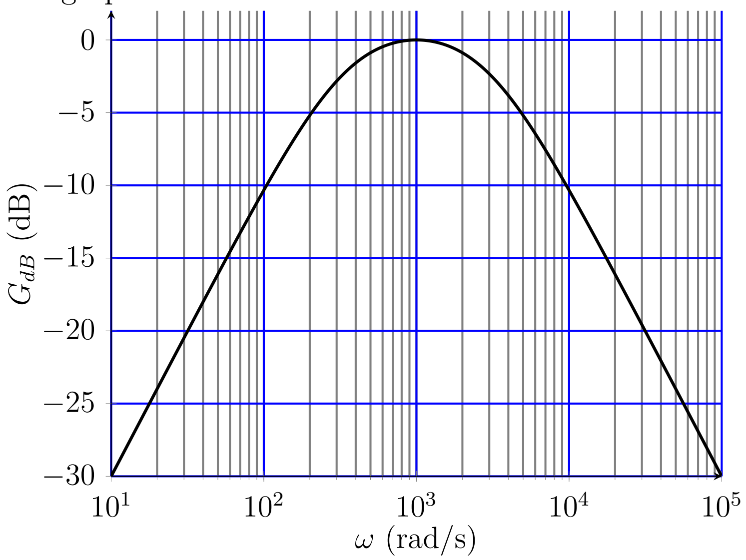
II.4 Bande passante

> **Définition : Bande passante**
> On définit la (ou les) **<u>pulsation(s) de coupure</u>** notée ω_c par la relation :
>
> $$\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\text{ dB}}$$
>
> La **<u>bande passante à $-$ 3dB</u>** est l'intervalle de pulsations tel que
>
> $$\boxed{G(\omega) > \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) > G_{\text{dB,max}} - 3\text{ dB}}\ \text{, avec } 20\log(\sqrt{2}) = 3\text{ dB}$$

Exercice de cours E

Déterminer graphiquement les pulsations de coupure sur les graphes ci-dessous.





II.5 Différents filtres

Définitions : Nature d'un filtre

Selon les fréquences des signaux transmis par un filtre, on définit :

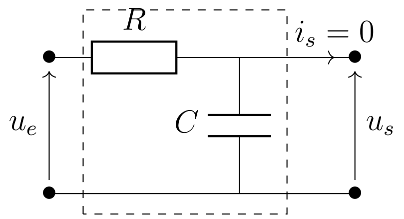
- un **filtre passe-bas** qui transmet les signaux à basse fréquence et coupe les signaux à haute fréquence ;
- un **filtre passe-haut** qui coupe les signaux à basse fréquence et transmet les signaux à haute fréquence ;
- un **filtre passe-bande** qui coupe les signaux à basse fréquence et les signaux à haute fréquence et transmet des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).

« Basse fréquence » et « Haute fréquence » est toujours issue de la comparaison de la fréquence du signal d'entrée avec une fréquence caractéristique du circuit (fréquence propre par ex.).

III Modèles de filtres passifs

III.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

On étudie le quadripôle suivant constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$. On le considère en sortie ouverte ($i_s = 0$), ce qui est le cas lorsqu'on branche un oscilloscope en sortie dont la résistance d'entrée $R_e = 1\ \mathrm{M\Omega} \gg R, \dfrac{1}{C\omega}$.



III.1.a) Étude asymptotique

Méthode : Déterminer la nature d'un filtre (sans calcul)

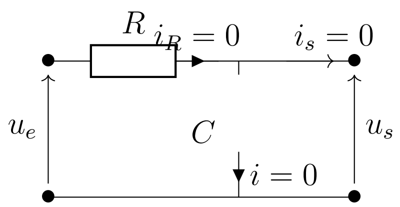
- Successivement, à basse fréquence, puis à haute fréquence :
  - Représenter le circuit équivalent avec les comportements asymptotiques.
  - En déduire les intensités et tensions nulles.
  - $\boxed{\text{Exprimer } u_s \text{ en fonction de } u_e \text{ uniquement}}$ et éventuellement de résistances. ⚠ Il ne doit y avoir aucune autre grandeur électrique que u_e dans l'expression de u_s pour pouvoir conclure.
- Conclure :
  - Si $u_s = f(u_e) \neq 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bas
  - Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = f(u_e) \neq 0$ à HF : c'est un filtre passe-haut
  - Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bande

Exercice de cours F **Étude qualitative du filtre**

En suivant la méthode ci-dessus, déterminer la nature du filtre.

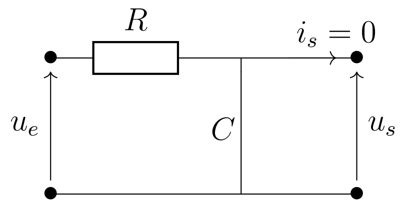
Solution:

À BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.



Par la loi des nœuds, $i_R = 0$.
La loi des mailles, nous donne : $\boxed{u_s = u_e}$: le filtre transmet les signaux à basses fréquences fidèlement.

À HF, le condensateur est équivalent à un fil.



u_s est la tension aux bornes d'un fil, donc $\boxed{u_s = 0}$: le filtre ne transmet pas les signaux à hautes fréquences.

Il s'agit d'un $\boxed{\text{filtre passe-bas}}$.

III.1.b) Fonction de transfert

Méthode : Établir une fonction de transfert

Quand le filtre est à vide ($i_s = 0$), l'établissement de la fonction de transfert se fait à l'aide d'un **pont diviseur de tension**.
Parfois, il sera nécessaire de procéder à des associations d'impédances au préalable.

Exercice de cours G **Fonction de transfert**

R1. À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre $\underline{u_s}$ et $\underline{u_e}$, et en déduire l'expression de la fonction de transfert.

Solution: Relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{u_s} &= \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}}\underline{u_e} \\
&= \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + R}\underline{u_e} \\
\underline{u_s} &= \frac{1}{1 + RCj\omega}\underline{u_e} \\
\underline{H} &= \frac{1}{1 + RCj\omega}
\end{aligned}$$

R2. Exprimer le gain de ce filtre, puis le gain en décibels.

Solution:
Gain : $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$
Gain en décibels : $G_{dB} = 20\log(G) = -10\log(1 + (RC\omega)^2)$

R3. Exprimer la phase ϕ du filtre.

Solution:
$\phi = \arg(\underline{H}) = -\arctan(RC\omega)$

III.1.c) Diagramme de Bode

Capacité exigible : Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

Méthode : Tracer le diagramme de Bode

- **Diagramme asymptotique**
  - Écrire la fonction de transfert harmonique.
  - Écrire l'équivalent de la fonction de transfert à basse et haute fréquence.
    On gardera systématiquement LE terme dominant du dénominateur.
  - **Diagramme asymptotique en gain**
    - En déduire l'équivalent du gain en décibels $G_{\text{dB}}\Big(\log(\omega)\Big)$ à BF et HF, sous la forme $a\log(\omega)+b$, avec a la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a=0$, l'asymptote est horizontale à b dB.
    - Tracer ces deux asymptotes.
  - **Diagramme asymptotique en phase**
    - Déterminer les limites du déphasage ϕ en basses et hautes fréquences.
    - Tracer ces deux asymptotes.
- **Diagramme réel**
  Pour tracer le diagramme réel, il est nécessaire d'ajouter des points particuliers. Pour les filtres du premier ordre, la pulsation de coupure, le gain en décibels et la phase à cette pulsation permettront de tracer ce diagramme.
  - À partir de l'expression du gain, déterminer l'expression, puis la valeur de la pulsation de coupure, ω_c qui est telle que $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.
  - Calculer le gain en décibels à la pulsation de coupure, qui par définition : $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3$ dB
  - Calculer la phase $\phi(\omega_c)$.

Exercice de cours H Diagramme de Bode

R1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.

Solution:

— À basse fréquence : $RC\omega \ll 1$
$\underline{H}_{BF} \approx 1 \in \mathbb{R}^+$
$G_{dB,BF} \approx 0$ dB : le diagramme de Bode en gain présente une asymptote horizontale à 0 dB
$\phi_{BF} = 0$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à 0 rad

— À haute fréquence : $RC\omega \gg 1$
$\underline{H}_{HF} \approx \dfrac{1}{RCj\omega} \in j\mathbb{R}^-$
$G_{dB,HF} \approx -20\log(RC\omega) = -20\log(RC) - 20\log(\omega)$: le diagramme de Bode en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/dec
$\phi_{HF} = -\dfrac{\pi}{2}$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à $-\dfrac{\pi}{2}$ rad.

R2. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure en fonction de R et C.

Solution:
On utilise la définition de la pulsation de coupure ω_c : $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.
Or le filtre étant un passe-bas, le gain est maximal à basse fréquence, donc $G_{\max} = G(\omega = 0) = 1$

$$\begin{aligned}
G(\omega_c) &= \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \\
\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
1+(RC\omega_c)^2 &= 2 \\
RC\omega_c &= 1
\end{aligned}$$

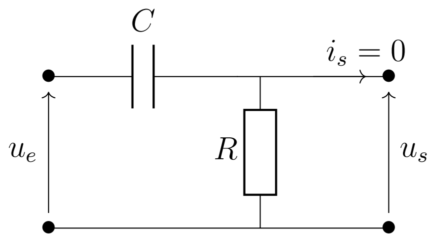
Soit $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{RC}}$

R3. Placer la pulsation de coupure et la valeur du gain en décibels et de phase à cette pulsation et en déduire le diagramme de Bode réel.

III.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

Exercice de cours I Étude d'un filtre passe-haut

On étudie le quadripôle alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.
On le considère en sortie ouverte, donc $i_s = 0$.



R1. Déterminer par une étude du circuit la nature du filtre.

Solution:

R2. Établir l'expression de la fonction de transfert.

Solution:

R3. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre en fonction de C et R.

Solution:

R4. Réécrire la fonction de transfert faisant intervenir la pulsation de coupure.

Solution:

On peut alors réécrire la fonction de transfert : $\boxed{\underline{H}(\omega) = \dfrac{\frac{1}{3}\frac{j\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}}$

R5. Déterminer le diagramme de Bode asymptotique.

Solution:

R6. En déduire le diagramme de Bode réel.

III.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

Capacité exigible : Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

On étudie le circuit ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$, en sortie ouverte ($i_s = 0$).

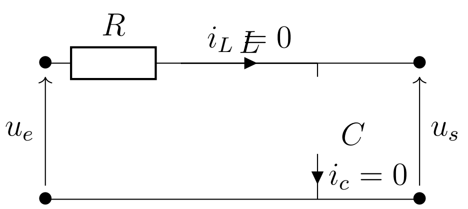
III.3.a) Comportement qualitatif

Exercice de cours J — Comportement qualitatif

Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.

Solution:

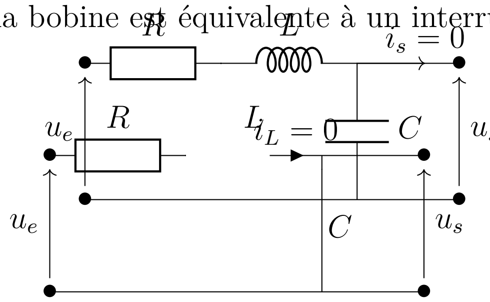
À BF, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert.



La loi des nœuds donne $i_L = 0$, puis la loi des mailles : $\boxed{u_s = u_e}$: les signaux à basse fréquence sont transmis.

Il s'agit donc d'un $\boxed{\text{filtre passe-bas.}}$

À HF, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert



u_s est la tension aux bornes d'un fil, donc $\boxed{u_s = 0}$: les signaux à haute fréquence ne sont pas transmis.

III.3.b) Diagramme de Bode

Méthode : Interpréter les asymptotes d'un Bode en lien avec la FTH

- Sur le diagramme de Bode :
  - Déterminer graphiquement les pentes des asymptotes du diagramme en gain, que l'on donne en dB/décade.

    En échelle logarithmique en fréquence, la pente est donnée par : $\dfrac{G_{dB}(f_2) - G_{dB}(f_1)}{\log(f_2) - \log(f_1)}$ [en dB/dec]

    Idéalement, prendre un intervalle d'une décade, c'est-à-dire $f_2 = 10 f_1$ (ainsi $\log(f_2) - \log(f_1) = 1$).
- Sur la fonction de transfert :
  - Établir les équivalents de la fonction de transfert à haute fréquence et à basse fréquence.
  - En déduire les équivalents du gain en décibels $G_{\text{dB}}\big(\log(\omega)\big)$ et les écrire sous la forme $a\log(\omega) + b$, avec a la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a = 0$, l'asymptote est horizontale à b dB.
- Comparer et commenter.

Exercice de cours K — Diagramme de Bode

On donne la fonction de transfert harmonique d'un filtre passe-bas du 2^e ordre $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$ et le diagramme de Bode associé pour différentes valeurs de Q.

R1. Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

Solution:
- À basse fréquence :
  - diagramme en gain : Asymptote horizontale à 0 dB
  - diagramme en phase : asymptote horizontale à 0°
- À haute fréquence :
  - diagramme en gain : Asymptote oblique de pente $\dfrac{-80-(-40))}{\log(10^2)-\log(10^1)} = -40$ dB/dec
  - diagramme en phase : asymptote horizontale à $-180°$

R2. Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire l'équation des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude. Comparer au diagramme de Bode fourni.

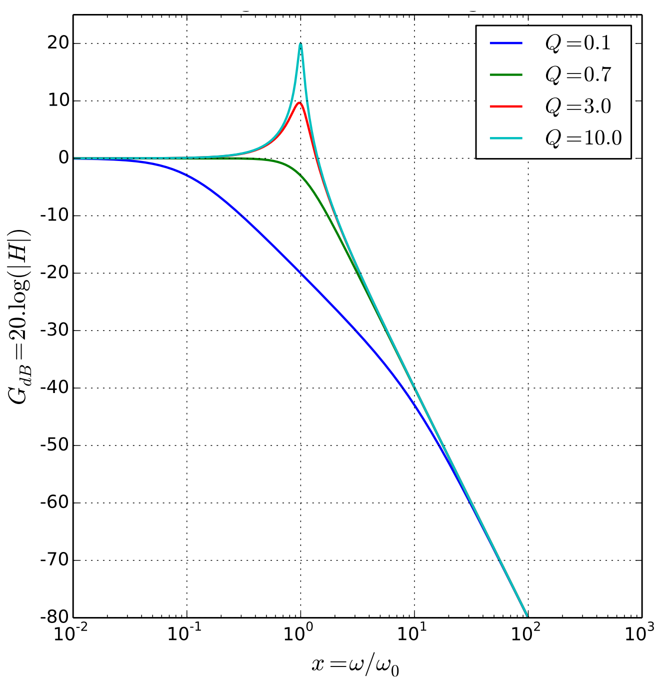
Solution: À basse fréquence, $\omega \ll \omega_0$, donc $\dfrac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll \dfrac{\omega}{\omega_0}$

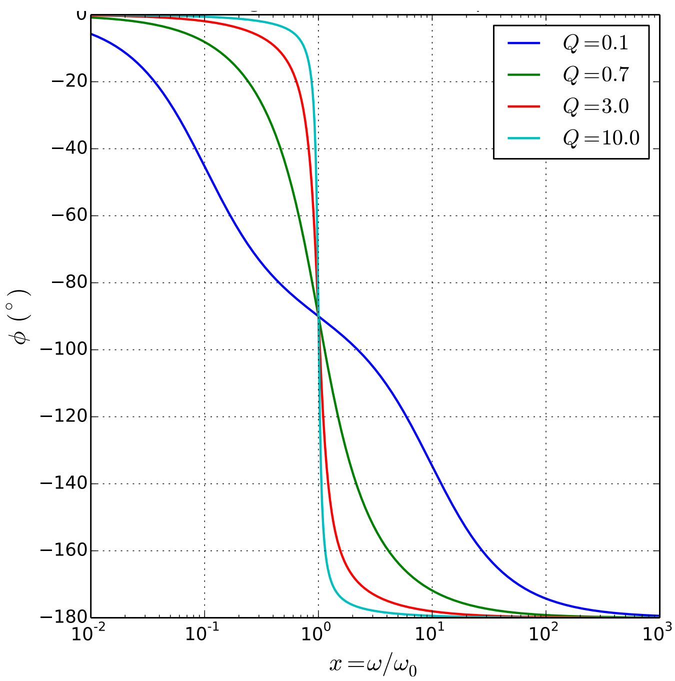
Ainsi le terme qui domine au dénominateur est 1, donc $\boxed{\underline{H}_{BF} = 1 \in \mathbb{R}^+}$
- Ainsi $G_{BF} = 1$, donc $G_{\text{dB},BF} = 0$ dB : c'est bien une asymptote horizontale à 0 dB.
- Phase : $\phi_{BF} = \arg(\underline{H}_{BF}) = 0$

R3. Faire de même à haute fréquence.

Solution: À haute fréquence, $\omega \gg \omega_0$, donc $\dfrac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ et $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Ainsi le terme qui domine au dénominateur est $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$, donc $\boxed{\underline{H}_{HF} \approx -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} \in \mathbb{R}^-}$
- Ainsi $G_{HF} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$, donc $G_{\text{dB},HF} = 40\log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right) = 40\log(\omega_0)\underbrace{-40}_{\text{pente}}\log(\omega)$: c'est l'équation d'une asymptote de pente -40 dB/dec
- Phase : $\phi_{HF} = \arg(\underline{H}_{HF}) = -\pi$

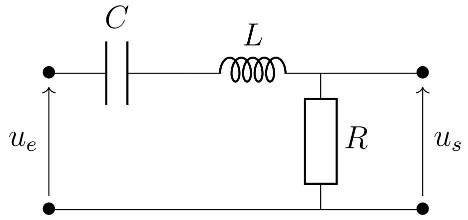




III.4 Filtre passe-bande d'ordre 2

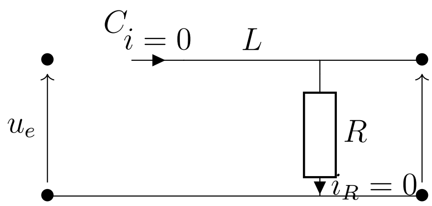
Exercice de cours L   Étude d'un filtre passe-bande d'ordre 2

On étudie le circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.



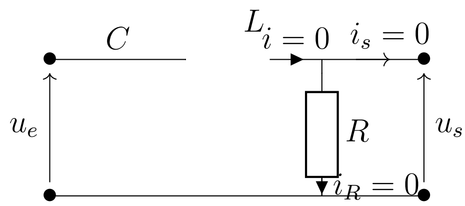
R1. Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.

Solution:
À BF, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert.



La loi des nœuds donne $i_R = 0$, puis la loi d'Ohm donne $\boxed{u_s = 0}$: les signaux basse fréquence ne sont pas transmis.
Il s'agit donc d'un $\boxed{\text{filtre passe-bande.}}$

À HF, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur est un fil



La loi des nœuds donne $i_R = 0$, puis la loi d'Ohm donne $\boxed{u_s = 0}$: les signaux haute fréquence ne sont pas transmis.

R2. Établir la fonction de transfert harmonique de ce filtre.

Solution: Relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{u_s} &= \frac{R}{R + Lj\omega + \dfrac{1}{Cj\omega}}\underline{u_e} \\
\underline{u_s} &= \frac{R}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}\underline{u_e} \\
\underline{u_s} &= \frac{1}{1 + \dfrac{j}{R}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}\underline{u_e} \\
\underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + \dfrac{j}{R}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}
\end{aligned}$$

On retrouve une expression semblable à celle obtenue pour l'intensité complexe lors de l'étude de la résonance en intensité du RLC série.

On peut écrire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

On rappelle les résultats du précédent chapitre : $|\underline{H}|$ présente un maximum en ω_0, et largeur de la bande passante est reliée à ω_0 et Q par : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

On donne ci-dessous le diagramme de Bode du filtre précédent pour différentes valeurs de Q.

R3. Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

Solution:
Les asymptotes ne dépendent pas du facteur de qualité.

- À BF :
  - Diagramme de Bode en Gain : asymptote de pente +20 dB/dec
  - Diagramme de Bode en phase : asymptote à $+\frac{\pi}{2}$ rad
- À HF :
  - Diagramme de Bode en Gain : asymptote de pente −20 dB/dec
  - Diagramme de Bode en phase : asymptote à $-\frac{\pi}{2}$ rad

R4. Déterminer les équivalents de la fonction de transfert à basse fréquence et à haute fréquence.
En déduire les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain à basse et à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Solution:

- À BF, $\omega \ll \omega_0$, et $\frac{\omega_0}{\omega} \gg \frac{\omega}{\omega_0}$

  Donc $\underline{H}_{BF}(j\omega) \approx \frac{1}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}}$

  Soit $\boxed{\underline{H}_{BF}(j\omega) \approx j\frac{\omega}{Q\omega_0} \in j\mathbb{R}^+}$

  - En gain :

$$\begin{aligned} G_{\text{dB,BF}} &= 20\log(|\underline{H}_{BF}|) \\ &\approx 20\log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) \\ &\approx \underbrace{+20}_{=\text{pente}}\log(\omega) - 20\log(Q\omega_0) \end{aligned}$$

    C'est l'équation d'une droite de pente +20 dB/dec
  - En phase : $\varphi_{BF} = +\frac{\pi}{2}$
- À HF, $\omega \gg \omega_0$, et $\frac{\omega_0}{\omega} \ll \frac{\omega}{\omega_0}$

  Donc $\underline{H}_{HF}(j\omega) \approx \frac{1}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}$

  Soit $\boxed{\underline{H}_{HF}(j\omega) \approx -j\frac{\omega_0}{Q\omega} \in j\mathbb{R}^-}$

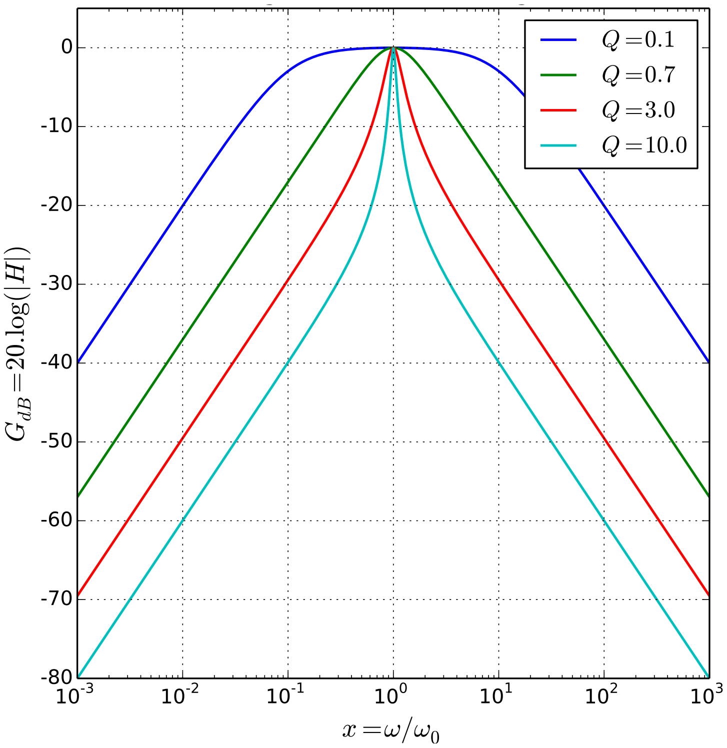
  - En gain :

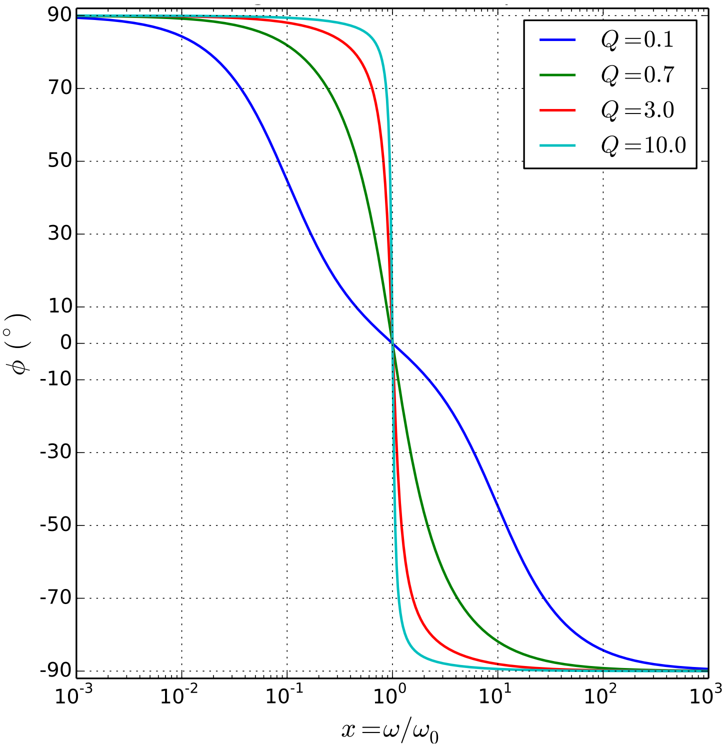
$$\begin{aligned} G_{\text{dB,HF}} &= 20\log(|\underline{H}_{HF}|) \\ &\approx 20\log\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right) \\ &\approx \underbrace{-20}_{=\text{pente}}\log(\omega) + 20\log(\omega_0) - 20\log(Q) \end{aligned}$$

    C'est l'équation d'une droite de pente −20 dB/dec
  - En phase : $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$

R5. Dans quels cas peut-on considérer qu'il est sélectif ?

Solution: Le filtre est sélectif si la largeur de la bande passante est faible devant la fréquence de résonance : seuls les signaux de fréquence proche de celle de la résonance seront transmis fidèlement. Cela se produit si le facteur de qualité est élevé.





IV Réponse d'un filtre à une excitation

Capacité exigible : Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

IV.1 Réponse d'un filtre à une somme finie de signaux sinusoïdaux

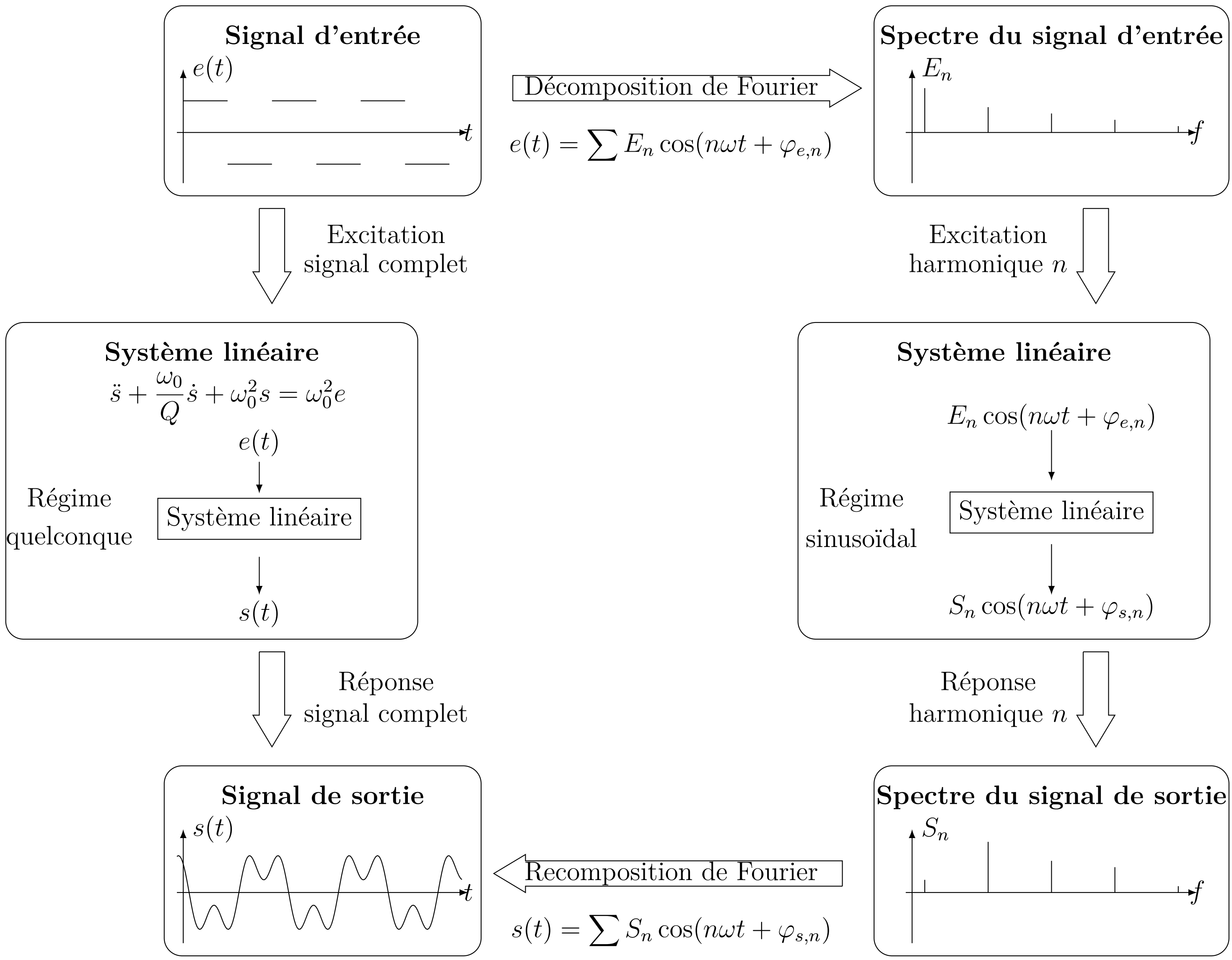
Problème : on donne une tension d'entrée, somme de plusieurs tensions sinusoïdales, et un filtre caractérisé par son diagramme de Bode et/ou sa fonction de transfert harmonique et on souhaite déterminer la tension en sortie du filtre.

À connaître : Réponse à une somme finie de signaux sinusoïdaux

Lorsque le filtre est soumis à un signal d'entrée qui s'écrit comme la somme de signaux sinusoïdaux de pulsations différentes, on procède par superposition :

1. Décomposer le signal d'entrée : $u_e(t) = \sum_n u_{en}(t) = \sum_n U_{en} \cos\left(\omega_n t + \varphi_{e,n}\right)$
2. Déterminer la réponse u_{sn} correspondant à chacune des composantes u_{en} grâce à la fonction de transfert harmonique du filtre :
   $u_{sn}(t) = U_{sn}\cos(\omega_n t + \varphi_{s,n})$, avec $U_{sn} = \left|\underline{H}(j\omega_n)\right| \times U_{en}$ et $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)$
3. Superposer les termes obtenus : $u_s(t) = \sum_n u_{sn}(t)$

Ainsi **connaissant la fonction de transfert harmonique et/ou le diagramme de Bode d'un filtre linéaire on peut connaître la réponse du filtre à n'importe quel signal somme de plusieurs signaux sinusoïdaux ou n'importe quel signal périodique**.



Méthode : Déterminer le signal en sortie d'un filtre

1. Séparer le signal d'entrée en signaux sinusoïdaux $u_{en}(t) = U_{en}\cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$
2. Pour chaque composante sinusoïdale, rechercher les caractéristiques (amplitude et phase à l'origine des temps) du signal de sortie $u_{sn}(t) = U_{sn}\cos(\omega_n t + \varphi_{s,n})$ correspondant :
   - Si la fonction de transfert est fournie, évaluer le module et l'argument de $\underline{H}$ à la pulsation ω_n :
     - amplitude de u_{sn} : $U_{sn} = \left|\underline{H}(j\omega_n)\right| \times U_{en}$
     - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$: $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)$
   - Si le diagramme de Bode est fourni :
     - amplitude de u_{sn} :
       - Lire à la pulsation ω_n la valeur du gain en décibel $G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)$ sur le diagramme de Bode en gain ;
       - Calculer l'amplitude : $U_{sn} = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20} \times U_{en}$
     - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$:
       - Lire à la pulsation ω_n la valeur de l'argument de $\underline{H}$ (déphasage entre l'entrée et la sortie) sur le diagramme de Bode en phase ;
       - Calculer $\varphi_{s,n}$: $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \underbrace{\arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)}_{\text{lu sur le diagramme de Bode}}$
   - En déduire l'expression de $u_{sn}(t)$.
3. En déduire le signal de sortie en sommant les signaux $u_{sn}(t)$ déterminés.

Attention – Erreur à ne pas commettre

Pour un signal qui n'est pas sinusoïdal pur, vous ne devez pas écrire $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

Exercice de cours M — Filtrage de la somme de signaux par un filtre passe-bas

On reprend le filtre passe-bas de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$, avec $\omega_c = 10^3$ rad · s^{-1}.

On envoie en entrée le signal $e(t) = E_0 + E\cos(\omega_1 t) + E\cos(\omega_2 t + \pi/3)$, avec $\omega_1 = 100$ rad · s^{-1} et $\omega_2 = 10^4$ rad · s^{-1}.

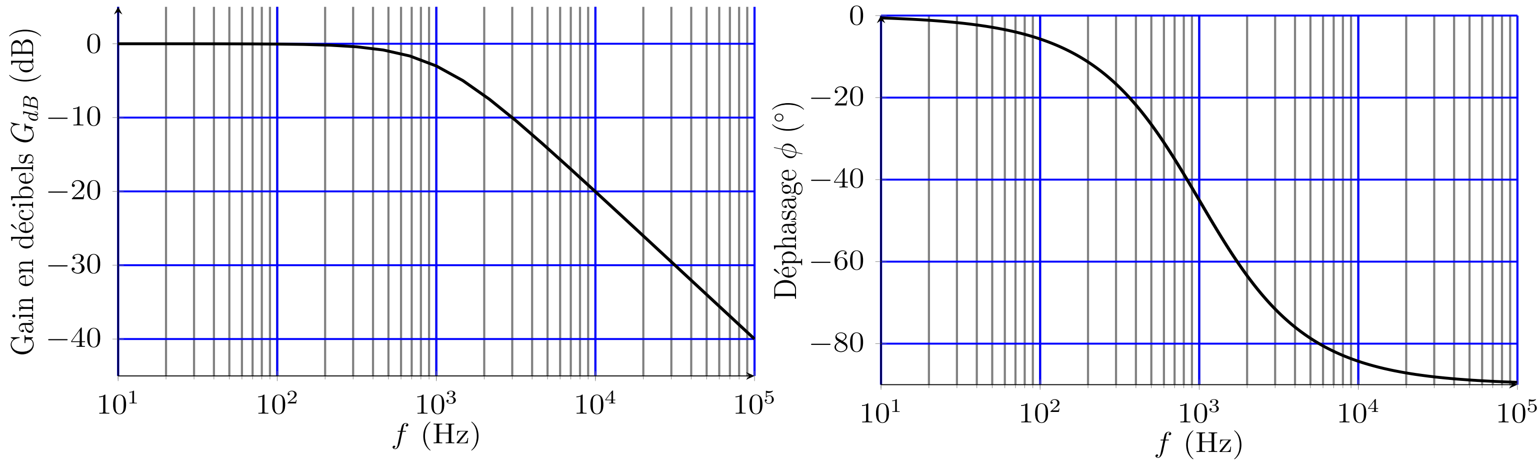
Par linéarité, le signal de sortie s'écrit $s(t) = S_0 + S_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{s1}) + S_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{s2})$

R1. Sans calcul, déterminer S_0.

R2. En utilisant la fonction de transfert fournie, déterminer S_1, S_2, φ_{s1} et φ_{s2} pour en déduire l'expression du signal de sortie du filtre.

R3. Représenter l'allure du signal de sortie.

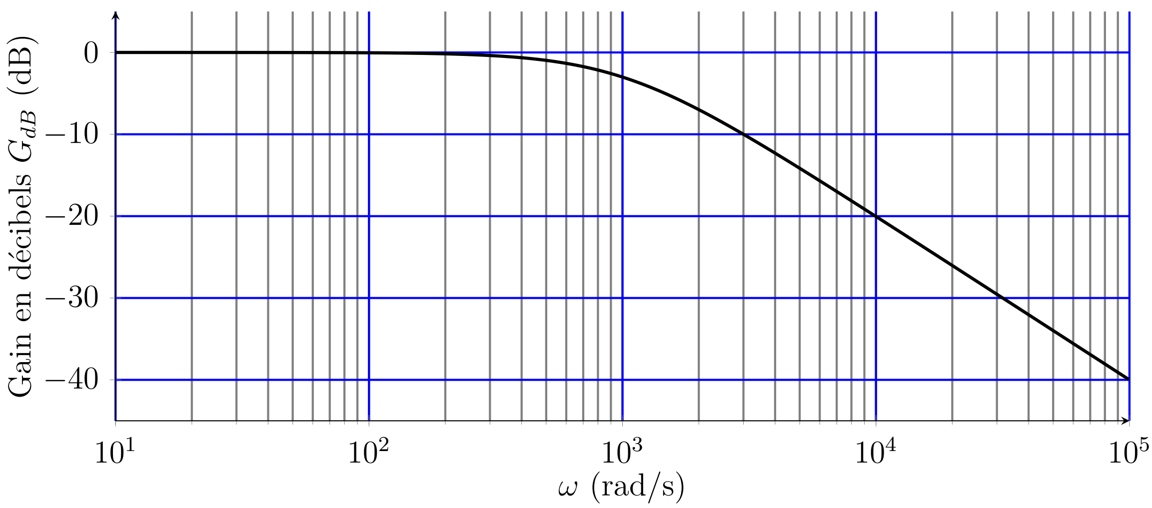
R4. Reprendre la question en utilisant le diagramme de Bode fourni ci-dessous.



IV.2 Réponse d'un filtre à un signal périodique

Exercice de cours N

On envoie en entrée du filtre dont le diagramme de Bode en gain est donné ci-dessous un signal créneau, d'abord de pulsation $\omega_e = 200$ rad · s^{-1}, puis de pulsation $\omega_e = 2.10^4$ rad · s^{-1}.



R1. Superposer le spectre du signal créneau (cf § I.1.b) page 4) sur le diagramme de Bode en gain, en tenant compte de la pulsation ω_e.

R2. En déduire l'allure du spectre du signal de sortie.

Solution:

IV.3 Opérations particulières

<u>Capacité exigible</u> : Explicíter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.

IV.3.a) Moyenneur

Réalisation d'un moyenneur

R1. Que faut-il supprimer pour ne conserver que la composante continue d'un signal, c'est-à-dire sa valeur moyenne ?

R2. Quel filtre faut-il donc utiliser pour réaliser un moyenneur ? Comment doit-être choisie sa fréquence de coupure ?

Solution:
Un signal périodique, quelqu'il soit s'écrit : $e(t) = E_0 + \sum_k E_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$, où $E_0 = \langle e(t) \rangle$

Pour récupérer en sortie le signal $s(t) = \langle e(t) \rangle$, il faut que le filtre supprime l'ensemble des composantes variables de pulsations $\omega_k = k\omega_1$.
Il faut donc utiliser un $\boxed{\text{filtre passe-bas}}$ de fréquence de coupure très petite devant ω_1.
Le critère « très petit » dépendra de l'ordre du filtre utilisé et de l'atténuation souhaitée.

À connaître : Obtention d'un moyenneur

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très petite devant la fréquence du signal d'entrée aura un effet moyenneur.

IV.3.b) Intégrateur

Réalisation d'un intégrateur

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1^er^ ordre s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

R1. En donner l'équivalent à haute fréquence (quand $\omega \gg \omega_c$).

Solution:
À haute fréquence, quand $\omega \gg \omega_c$, c'est-à-dire dans la zone de l'asymptote -20 dB/dec $\underline{H}_{HF} \approx H_0 \dfrac{\omega_c}{j\omega}$

R2. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, déterminer l'expression du signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-bas du 1^er^ ordre sur un signal d'entrée de fréquence grande devant la fréquence de coupure ?

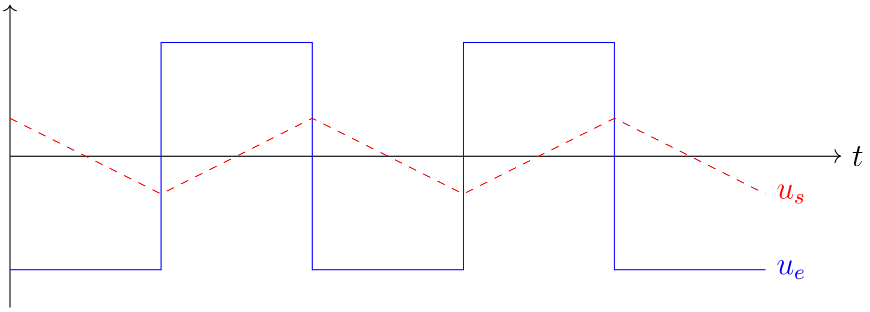
Solution:

$$\begin{aligned}
\underline{H}_{HF} &\approx H_0\frac{\omega_c}{j\omega}\\
\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} &\approx H_0\frac{\omega_c}{j\omega}\\
\underline{u_s} &= H_0\omega_c \times \frac{\underline{u_e}}{j\omega}\\
\underline{u_s} &= H_0\omega_c \times \int \underline{u_e}\mathrm{d}t\\
u_s(t) &= H_0\omega_c \times \int u_e(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Un filtre passe-bas du premier ordre alimenté par un signal de fréquence très grande devant la fréquence de coupure réalise une intégration du signal d'entrée.

R3. On alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz avec un signal créneau de fréquence 1 kHz. Qu'observe-t-on en sortie ?

Solution: La fréquence du créneau est très grande devant la fréquence de coupure, il est donc intégré par le filtre.



À connaître : Obtention d'un intégrateur

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente -20 dB/déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

IV.3.c) Dérivateur

Réalisation d'un dérivateur

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 1er ordre s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

R1. En donner l'équivalent à basse fréquence (quand $\omega \ll \omega_c$).

Solution: À basse fréquence : $\underline{H} \approx H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_c}$

R2. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, déterminer l'expression du signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-haut du 1er ordre sur un signal d'entrée de fréquence petite devant la fréquence de coupure ?

Solution:

$$\begin{aligned}
\underline{H} &\approx H_0 j\frac{\omega}{\omega_c}\\
\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} &= H_0 j\frac{\omega}{\omega_c}\\
\underline{u_s} &= \frac{H_0}{\omega_c}\times j\omega\times\underline{u_e}\\
\underline{u_s} &= \frac{H_0}{\omega_c}\times\frac{\mathrm{d}\underline{u_e}}{\mathrm{d}t}\\
u_s &= \frac{H_0}{\omega_c}\times\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

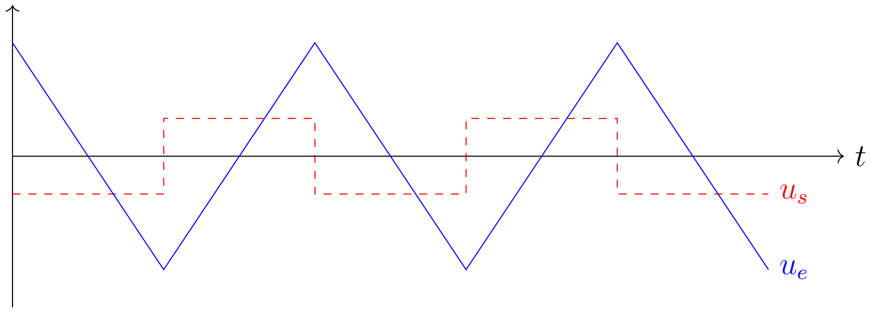
À basse fréquence, un filtre passe-bas du 1$^{\text{er}}$ ordre réalise la dérivation du signal d'entrée.

R3. On alimente un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure 1 kHz avec un signal triangulaire de fréquence 10 Hz. Qu'observe-t-on en sortie ?

Solution:
La fréquence du triangle est très petite devant la fréquence de coupure du filtre passe-haut, il est donc dérivé par le filtre.

Plus exactement, les harmoniques de fréquence faible devant 1 kHz vont être dérivés. Les harmoniques à partir du rang 11 sont à moins d'une décade de la coupure, et ne seront pas très bien dérivés.

On obtiendra donc un signal créneau un peu déformé.



À connaître : Obtention d'un dérivateur
Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/déc, alors il aura un comportement dérivateur sur cette gamme de fréquence.

IV.4 Simuler l'action d'un filtre

<u>**Capacité numérique**</u> : **Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni.**
Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.
Les calculs effectués précédemment sont un peu fastidieux, d'autant plus pour des signaux composés d'un grand nombre d'harmoniques. L'utilisation de l'outil informatique est tout à fait pertinent. Pour étudier la réponse d'un filtre à un signal dont le décomposition est connue, plusieurs étapes sont nécessaires, identiques à celles que l'on met en œuvre « à la main » :

- Définir la fonction de transfert du filtre étudié.
- Définir le signal d'entrée à partir de son développement en série de Fourier.
- Déterminer les amplitudes et phases à l'origine des temps du signal de sortie à partir de leurs valeurs du signal d'entrée et le gain et la phase de la fonction de transfert.

```python
## Bibliothèques nécessaires
import matplotlib.pyplot as plt   # pour les tracés graphiques
import numpy as np          # pour manipuler les tableaux
from cmath import *         # pour manipuler les complexes : abs pour le module  et phase pour l'argument
```

On souhaite étudier ici la réponse d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$ de fréquence de coupure $f_c = 1$ kHz, à un signal somme de deux signaux de même amplitude 1 V de fréquence 100 Hz et 10 kHz, sans phase à l'origine des temps.

■ Fonction de transfert

Écrire la fonction de transfert harmonique du passe-bas 1 utile ici :

```python
def passe_bas1(fc,f):
    return                                  # 1j est i des maths
```

■ Définir le signal d'entrée

On commence par définir la fonction `gene_signal` qui permet de générer un signal connaissant son spectre en amplitude et en phase, c'est-à-dire les fréquences, amplitudes et phases à l'origine des temps des harmoniques.

Le signal qu'on cherche à exprimer est donné par la somme suivante de n termes : $\sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos(2\pi \times f_k \times t + \varphi_k)$, où A_k est l'amplitude de la composante de rang k de fréquence f_k et dont la phase à l'origine des temps est φ_k.

Elle prend trois arguments en entrée, qui sont trois listes de même longueur :

- `frequence` : liste qui contient les fréquences des signaux que l'on somme
- `amplitude` : liste qui contient les amplitudes des signaux que l'on somme (dans le même ordre que fréquence)
- `phase` : liste qui contient les phases à l'origine des temps des signaux que l'on somme (dans le même ordre que fréquence)
- et un tableau `temps` des `Nt` instants d'expression du signal.

Et renvoie un tableau de `Nt` valeurs du signal aux `Nt` instants considérés entre `t_dbt` et `t_fin`.

```python
def gene_signal(frequence, amplitude, phase, temps):
    # signal temporel
    Nt=len(temps)
    s = np.zeros(Nt) # intialisation du signal : tableau de Nt 0
    # Somme des harmoniques


    return s
```

Écrire les lignes permettant de définir le signal d'entrée qui nous intéresse ici sur

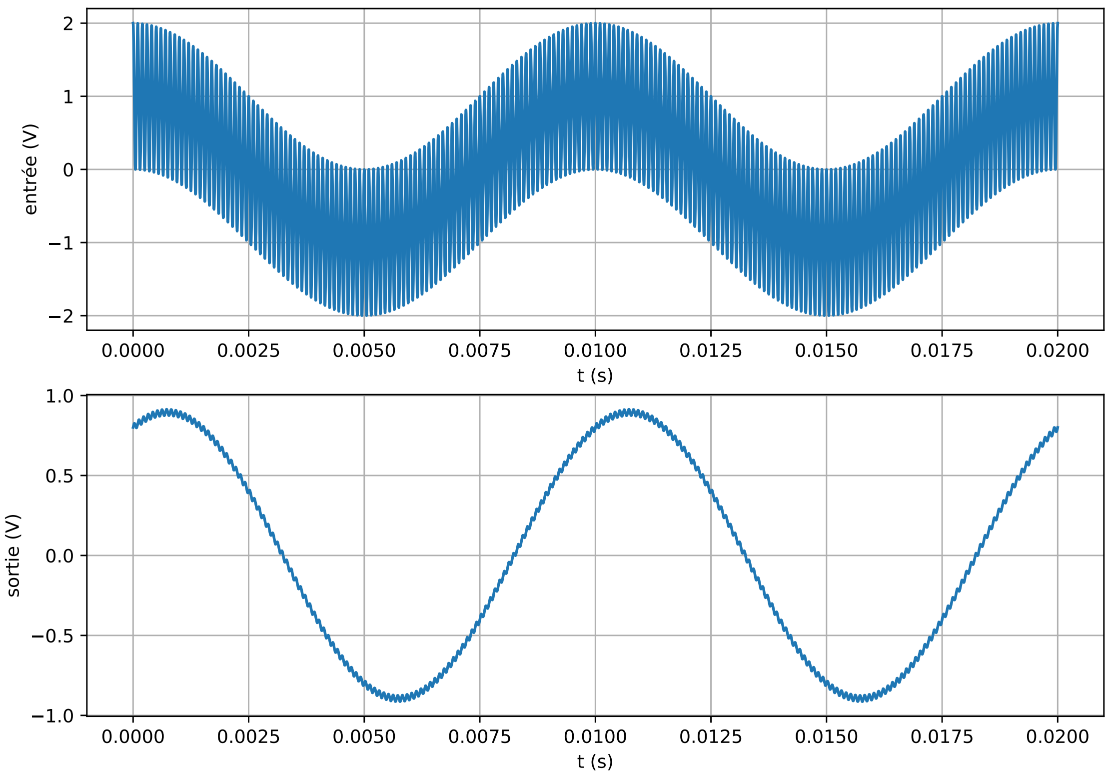
```python
# listes caractérisant les harmoniques du signal d'entrée
freq=                          # liste des fréquences des harmoniques
ampl_e=                         # liste des amplitudes des harmoniques
phi_e=                          # liste des phases des harmoniques
Nt=1000 # nombre d'instants de calculs
t=np.linspace(0,5*1/freq[0],Nt) # tableau des instants de calculs des signaux d'entrée et de sortie
#création du signal d'entrée :
entree=
```

■ Détermination du signal de sortie

Compléter les lignes suivantes permettant de déterminer le signal de sortie connaissant le signal d'entrée et la fonction de transfert du filtre étudié.

```python
ampl_s= [] # liste des amplitudes des harmoniques du signal de sortie
phi_s= []  # liste des phases des harmoniques du signal de sortie
for i in range(len(freq)):
    H=                         # fonction de transfert à la fréquence freq[i]
    G=                         # gain de la FTH
    ampl_si=                      # amplitude de l'harmonique i de sortie
    ampl_s.append(                )
    phi=                     # déphasage = argument de la FTH
    phi_si=                       # phase à l'origine de l'harmonique i de sortie
    phi_s.append(                 )
# calcul du signal de sortie
sortie=gene_signal(             ,            ,           ,   )
```

```python
## Tracé des signaux d'entrée et de sortie
plt.plot(t,entree,label="entrée")
plt.plot(t,sortie,label="sortie")
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('tension (V)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

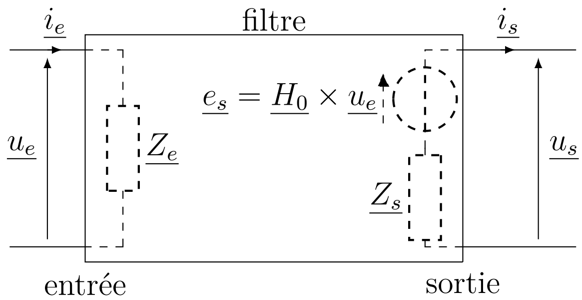


V Mise en cascade de filtres

V.1 Impédances d'entrée et de sortie

L'action d'un filtre linéaire sur le reste du circuit peut être modélisée par le système ci-contre :

- Vu depuis l'entrée, le filtre se comporte comme une impédance $\underline{Z_e}$, appelée **impédance d'entrée du filtre**, définie par $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$.
- En sortie, l'action du filtre sur ce qui se situe après est modélisée par un générateur réel :
  - de fem $\underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$;
  - d'impédance $\underline{Z_s}$, appelée **impédance de sortie du filtre**.

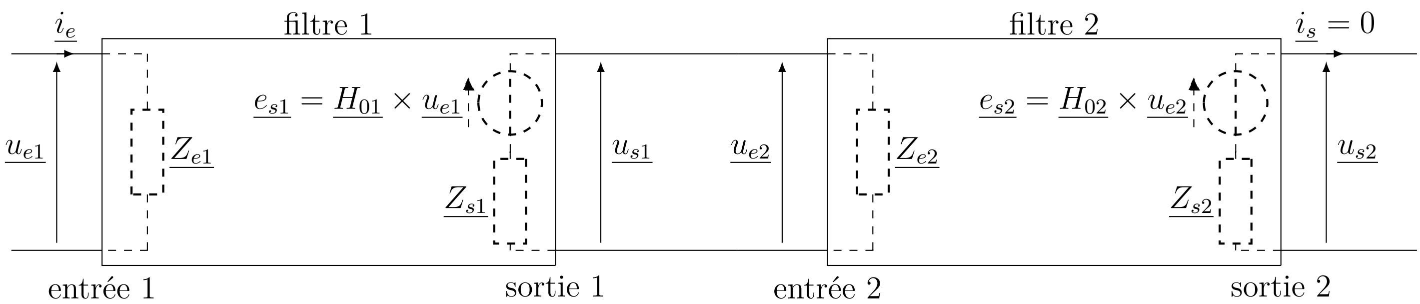


Lorsque le filtre est à vide (rien n'est branché en sortie, donc $\underline{i_s} = 0$), alors $\underline{u_s} = \underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$, avec $\underline{H_0}$ la fonction de transfert du filtre non chargé.
Lorsque le filtre est chargé (quelque chose est branchée en sortie, donc $\underline{i_s} \neq 0$), $\underline{u_s} = \underline{e_s} - \underline{Z_s} \times \underline{i_s}$, donc $\underline{u_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e} - \underline{Z_s}\underline{i_s} \neq \underline{H_0} \times \underline{u_e}$.

> Ainsi la fonction de transfert du filtre chargé $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \neq \underline{H_0}$: la fonction de transfert du filtre chargé est modifiée par la charge, donc le fonctionnement fréquentiel du filtre est modifié par la charge.

V.2 Mise en cascade de deux filtres

<u>**Capacité exigible**</u> : **Comprendre l'intérêt, pour garantir le fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.**



$\underline{H_{01}}$ et $\underline{H_{02}}$ sont les fonctions de transfert à vide des deux filtres (c'est-à-dire lorsqu'ils ne sont pas chargés).

> ### ♥ À retenir : Mise en cascade de filtres
> La fonction de transfert d'un filtre n'est pas modifiée lors de sa mise en cascade s'il présente une impédance d'entrée très grande, voire infinie, et une impédance de sortie très faible, voire nulle :
>
> $$Z_e(\text{filtre suivant}) \gg Z_s(\text{filtre précédent})$$
>
> La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'**impédances d'entrée très grandes**, voire infinies, et d'**impédances de sortie très faibles**, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert à vide de chaque filtre :
>
> $$\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2} \times \ldots$$

La fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e1}}} = \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}} \times \frac{\underline{u_{e2}}}{\underline{u_{e1}}} = \underbrace{\frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}}}_{=\underline{H_{02}}} \times \underbrace{\frac{\underline{u_{s1}}}{\underline{u_{e1}}}}_{\neq \underline{H_{01}}}$$

Le filtre 2 n'est pas chargé, donc $\underline{u_{s2}} = \underline{e_{s2}} = \underline{H_{02}} \times \underline{u_{e2}}$

⚠ Le filtre 1 est chargé par la présence du filtre 2, donc $\dfrac{\underline{u_{s1}}}{\underline{u_{e1}}}$ n'est pas égal à la fonction de transfert $\underline{H_{01}}$ à vide.
Relions $\underline{u_{s1}} = \underline{u_{e2}}$ à $\underline{u_{e1}}$.
Entre $\underline{Z_{e2}}$ et $\underline{Z_{s1}}$ nous reconnaissons un pont diviseur de tension, ainsi $\underline{u_{e2}} = \dfrac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underbrace{\underline{e_{s1}}}_{=\underline{H_{01}} \times \underline{u_{e1}}}$

Ainsi $\underline{u_{e2}} = \dfrac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}} \times \underline{u_{e1}}$, donc $\dfrac{\underline{u_{e2}}}{\underline{u_{e1}}} = \dfrac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}}$
Nous en déduisons l'expression de la fonction de transfert de l'ensemble :

$$\underline{H} = \underline{H_{02}} \times \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}}$$

La fonction de transfert globale est égale au produit des deux fonctions de transfert à vide :

$$\underline{H} = \underline{H_{02}} \times \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}} \approx \underline{H_{02}} \times \underline{H_{01}} \Leftrightarrow \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \approx 1$$

Il faut pour cela que $|\underline{Z_{e2}}| \gg |\underline{Z_{s1}}|$

Il faut donc faire très attention lorsque l'on met des filtres en cascades. En effet, **la présence d'un filtre en aval peut charger le filtre en amont, et modifier sa fonction de transfert, et donc son comportement fréquentiel.**