

Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique) TD n°12 Description et paramétrage du mouvement d'un point

💡 Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com.

Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Ordres de grandeurs et conversions

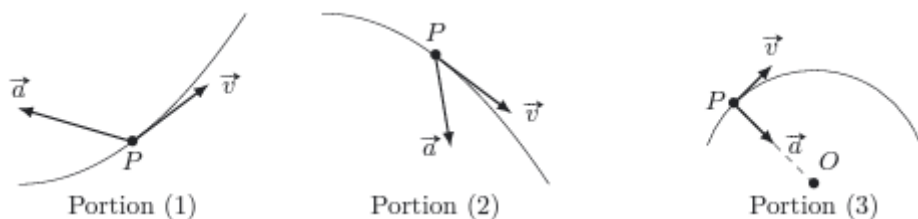
- Q1. Donner la vitesse commerciale d'un bus sur l'autoroute, d'un TGV et d'un avion de ligne à réaction en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- Q2. Convertir les vitesses précédentes en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Q3. Donner la vitesse de rotation d'un moteur de voiture au ralenti en tour/min et la convertir en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice n°2 Mouvements d'un planeur

Capacités exigibles :

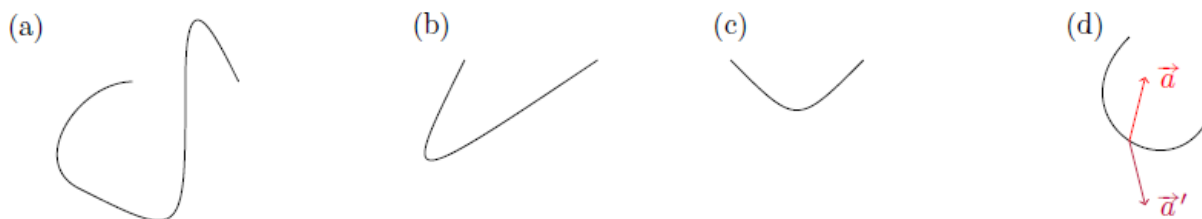
- ✓ Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accelération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accelération dans la concavité d'une trajectoire plane.

Nous nous intéressons à l'évolution de la norme du vecteur vitesse d'un planeur dans trois portions de sa trajectoire représentées ci-dessous. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ du planeur assimilé à un point P y sont indiqués à un instant donné.



- Q1. Déterminer pour chaque portion de trajectoire si la norme de la vitesse de P augmente ou diminue.
- Q2. La portion (3) est circulaire de rayon R et de centre O . Quel est le lien entre la norme du vecteur accélération et celle du vecteur vitesse ?

On considère une autre série de trajectoires :



Q3. Sur la trajectoire (a) ci-dessus, le vecteur vitesse est-il constant ? Représenter en quelques points de la trajectoire le vecteur accélération.

Q4. Un système peut suivre les deux trajectoires (b) et (c) avec une même vitesse v de norme constante dans les deux cas. Dans quel cas la norme du vecteur accélération est-elle la plus grande ?

Le vecteur accélération du système à un instant donné est représenté sur la trajectoire (d).

Q5. Lequel des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{a}'$ est le vecteur accélération ?

Q6. Peut-on en déduire le sens de parcours de la trajectoire ?

Q7. En supposant que la trajectoire est parcourue dans le sens horaire, que peut-on en déduire sur la variation de la norme du vecteur vitesse ?

Exercice n°3 Calcul de vitesse et d'accélération

Capacités exigibles :

✓ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.

Un point M en mouvement est repéré par ses coordonnées cartésiennes qui évoluent dans le temps selon les équations horaires : $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$, avec $x_0 = -z_0 = 1$ m, $v_0 = 3$ m · s⁻¹ et $a_0 = 2$ m · s⁻².

Q1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération à l'instant t .

Q2. Calculer la norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 2$ s.

Q3. Calculer la norme du vecteur accélération de M à l'instant $t = 1$ s.

Exercice n°4 Mouvement circulaire

Capacités exigibles :

✓ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires.

Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon $R = 1,0$ m. L'angle $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$ vérifie la loi horaire $\theta(t) = \pi \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ avec $T = 1,0$ s.

Q1. Au bout de combien de temps M passe-t-il par la position telle que $\theta = \frac{\pi}{2}$?

Q2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération.

Q3. Pour quelles valeurs de θ la norme du vecteur accélération est-il maximal ?

Exercice n°5 Trajectoire

Capacités exigibles :

- ✓ Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle, d'une ellipse, d'une branche d'hyperbole, d'une parabole.
- ✓ Tracer une courbe paramétrée à l'aide d'un grapheur.
- ✓ Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a \cos(\omega t)$, $y = b \cos(\omega t - \varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.

Un point M décrit un mouvement d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos(\omega t) \\ y(t) = \beta \sin(\omega t) \end{cases}$$

- Q1. Quelle est la nature de la trajectoire ? Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?
- Q2. Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes.
- Q3. Exprimer les normes du vecteur vitesse et du vecteur accélération à l'instant $t = \frac{\pi}{4\omega}$.

Exercice n°6 Test d'accélération et de freinage

Capacités exigibles :

- ✓ Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps.

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

- Q1. Avec une accélération constante, elle parcourt une distance $D = 180$ m en $\tau = 26,6$ s. Déterminer la valeur de l'accélération et la vitesse atteinte à la distance D .

On considère désormais que la voiture est animée d'une vitesse $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne et qu'elle freine avec une accélération constante de norme $a_0 = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Q2. Calculer la durée et la distance de freinage.
- Q3. Combien de « g » ressentirait un conducteur si l'on effectuait le même freinage sur une distance de 1,0 m ?

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°7 Trajectoire plane en coordonnées polaires

Capacités exigibles :

- ✓ Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes.
- ✓ Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

Un point décrit un mouvement dans le plan dont les équations horaires polaires sont :
$$\begin{cases} r(t) = a(1 + \cos(\omega t)) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où a et ω sont des constantes positives.

- Q1. Exprimer l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta)$ (le temps n'intervient plus explicitement).
- Q2. À l'aide de votre calculatrice (utiliser le mode polaire pour le graphe), représenter l'allure de la trajectoire.
- Q3. Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$.
- Q4. Établir l'expression du vecteur vitesse du point M .
- Q5. Établir l'expression du vecteur accélération du point M .
- Q6. Exprimer les normes du vecteur vitesse et accélération aux instants $t = \frac{\pi}{2\omega}$ et $t = \frac{\pi}{\omega}$.

Représenter, sur le schéma précédent, les vecteurs vitesse et accélération à ces deux instants.

Exercice n°8 Freinages par frottement

Capacités exigibles :

- ✓ Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps dans le cas d'un mouvement de vecteur accélération constant.

On considère un objet assimilé à un point matériel M susceptible de se déplacer selon l'axe Ox .
À $t = 0$, il se trouve en O et son vecteur vitesse vaut $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Q1. L'objet subit une force de frottement solide de sorte que son vecteur accélération $\vec{a}(M)$ peut être supposé constant et égal à $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{u}_x$ avec $a_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, jusqu'à son arrêt.

Déterminer sa vitesse et sa position au cours du temps ainsi que la distance totale parcourue.

- Q2. L'objet subit une force de frottement fluide de sorte que son vecteur accélération $\vec{a}(M)$ est relié à sa vitesse $\vec{v}(M)$ par la relation $\vec{a}(M) = -\alpha \vec{v}(M)$ avec $\alpha = 0,10 \text{ s}^{-1}$.

Déterminer sa vitesse et sa position au cours du temps ainsi que la distance maximale parcourue.

Exercice n°9 Escalier en colimaçon

Capacités exigibles :

- ✓ Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaître l'angle de marche $\alpha = 30^\circ$. La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche $H = 20 \text{ cm}$.

Un usager, assimilé à un point matériel M , monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à la distance $r = 60 \text{ cm}$ de Oz . Sur la figure de gauche M_0 est le projeté de M suivant un plan perpendiculaire à Oz . Les croix représentent les positions successives de M_0 , pointées lorsque l'usager est sur une marche.

Nous désirons étudier le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à l'escalier et repéré par (O, x, y, z) .

- Q1. Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote z du point M . Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ sachant que $z = 0$ à l'instant $t = 0$

Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier central sachant que $\theta(0) = \theta_0 = -30^\circ$ à l'instant $t = 0$.

- Q2. Qualifier le mouvement de M_0 . Donner une valeur numérique de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

- Q3. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 par rapport à $\mathcal{R}$. Calculer sa vitesse.

- Q4. Quel est le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$?

- Q5. Exprimer, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice n°10 Vitesse d'un point à la surface de la Terre

Capacités exigibles :

- ✓ Choisir le système de coordonnées adapté.

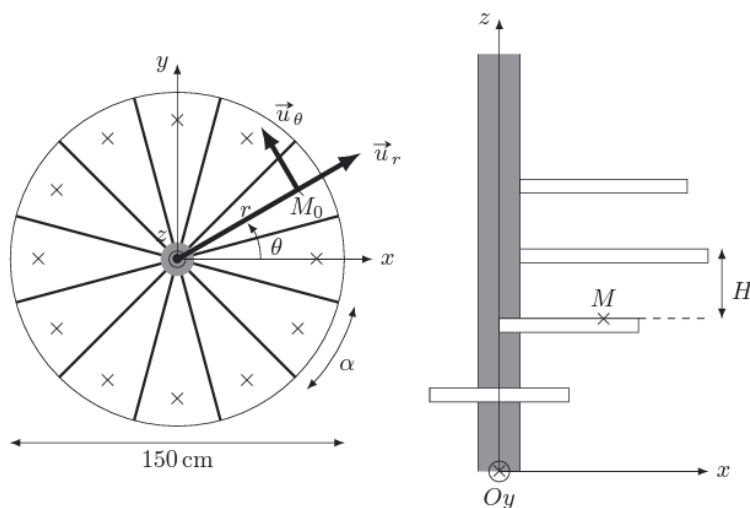
- ✓ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires.

- Q1. Que vaut la latitude (approximative) de Valence?

- Q2. Quel mouvement décrit un point fixe de la Terre dans le référentiel géocentrique?

- Q3. Exprimer le vecteur vitesse d'un point à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique.

- Q4. Calculer la vitesse due à la rotation de la Terre d'un point à la surface de la Terre au niveau de Valence dans le référentiel géocentrique. On rappelle que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6370 \text{ km}$.



III Extrait du cahier d'entraînement de physique-chimie

Déplacements rectilignes



Entraînement 10.1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?



Entraînement 10.2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?



Entraînement 10.3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....



Entraînement 10.4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

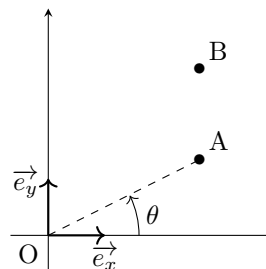
Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\vec{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) $\vec{OA}$

b) $\vec{OB}$

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$

Entraînement 10.6 — Les coordonnées cylindriques.

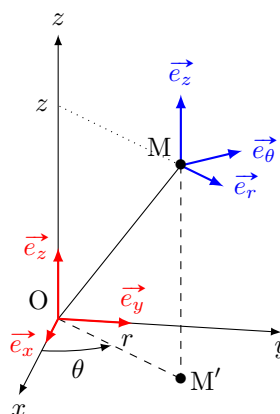


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cartésienne

b) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cylindrique

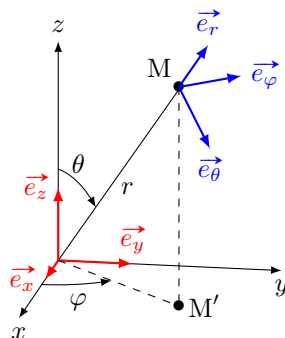
c) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cylindrique

 Entraînement 10.7 — Les coordonnées sphériques.



On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de r et θ

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique

e) Écrire le vecteur $\vec{e}_z$ dans la base sphérique

 Entraînement 10.8 — Jouons au tennis.



Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial

b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

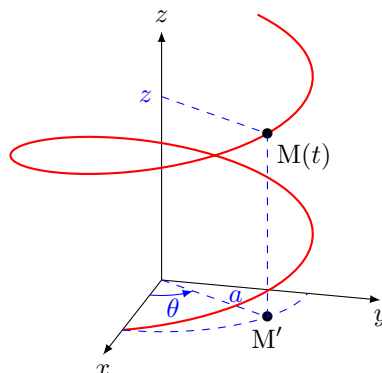
Dérivée de vecteurs

Entraînement 10.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

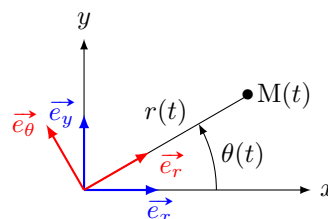
d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 10.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur $\vec{e}_x$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur $\vec{e}_y$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ dans la base polaire



Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.



On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.



Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.



On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position

b) vitesse

c) accélération ..

Entraînement 11.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.



On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération

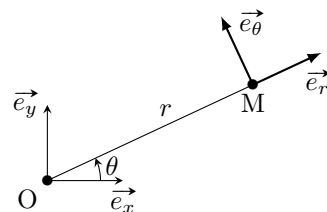
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

- a) $\vec{e}_r$ b) $\vec{e}_\theta$

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ des vecteurs :

- c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

- e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires ?

- (a) $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$ (b) $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (c) $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ (d) $\overrightarrow{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.



Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\vec{e}_r$ et de $\vec{e}_\theta$:

- a) du vecteur vitesse $\vec{v}$
- b) du vecteur accélération $\vec{a}$